

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

BRUNO DOS SANTOS SOLHEID

**DISPERSÃO DE POLUENTE POR ONDAS NA
ZONA DE ARREBENTAÇÃO**

**CURITIBA
2010**

BRUNO DOS SANTOS SOLHEID

DISPERSÃO DE POLUENTE POR ONDAS NA ZONA DE ARREBENTAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração: Mecânica Computacional, Setores de Tecnologia e Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof.Dr. Maurício Felga Gobbi

CURITIBA
2010



Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná

Setor de Tecnologia / Setor de Ciências Exatas
Departamento de Construção Civil / Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE

RELATÓRIO DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos quatorze dias do mês de abril de 2010, no Auditório do CESEC da Universidade Federal do Paraná, foi instalada pela Professora Liliana M. Gramani, Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, a Banca Examinadora para a Ducentésima Vigésima Primeira Dissertação de Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração Mecânica Computacional. Estiveram presentes ao Ato, além da Coordenadora do Programa, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, atendendo determinação do Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, ficou constituída pelos professores: Davide Franco, D.Eng. da Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC; Nelson Luis Dias, Ph.D. do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE da UFPR; Cynara de Lourdes da Nóbrega Cunha, D.Sc. do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE e Maurício Felga Gobbi, PhD., do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE da UFPR a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às quatorze horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando o candidato **Bruno dos Santos Solheid** a fazer a apresentação do tema da dissertação intitulada "Dispersão de Poluente por ondas na Zona de Arrebentação". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de arguição pelos membros participantes. Após a arguição, a banca reuniu-se para apreciação do desempenho do pós-graduando.

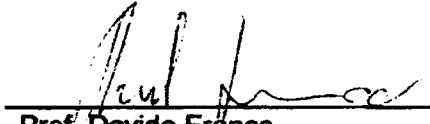
A banca considerou que o pós-graduando fez uma apresentação com a necessária concisão e que a dissertação apresenta contribuição à área de estudos. Além disso, não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a dissertação e a arguição, a banca decidiu pela sua aprovação.

Curitiba, 14 de abril de 2010




Prof. Maurício Felga Gobbi
Presidente



Prof. Davide Franco



Prof. Nelson Luis Dias



Prof. Cynara de Lourdes da Nóbrega Cunha



CONFERE COM O ORIGINAL

TERMO DE APROVAÇÃO

BRUNO DOS SANTOS SOLHEID

DISPERSÃO DE POLUENTE POR ONDAS NA ZONA DE ARREBENTAÇÃO

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção de grau de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - Área de Concentração: Mecânica Computacional - Setores de Tecnologia e Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador: Prof. Maurício Felga Gobbi
Departamento de Engenharia Ambiental - UFPR

Prof^a. Cynara de Lourdes da Nobrega Cunha
Departamento de Engenharia Ambiental - UFPR

Prof. Nelson Luis da Costa Dias
Departamento de Engenharia Ambiental - UFPR

Prof. Davide Franco
Departamento de Engenharia Sanitária e Ambiental - UFSC

Curitiba, 14 de Abril de 2010.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Maurício Felga Gobbi pela orientação deste trabalho.

Aos meus colegas do PPGMNE que direta ou indiretamente ajudaram no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus professores do PPGMNE pelos ensinamentos transmitidos.

Ao CAPES pelo apoio financeiro.

A todos os meus amigos.

A minha família.

EPÍGRAFE

... não há nada em ciência mais provocativo que predições claramente definidas e surpreendentes, e nada mais valoriza do que as mesmas predições quando confirmadas pela prática e observação.

Wilson

RESUMO

Neste trabalho é apresentado um modelo para o comportamento da concentração de organismos patogênicos em zonas costeiras. O modelo proposto nesse trabalho é baseado em soluções analíticas da equação da difusão-advecção. Foi escolhida uma solução analítica mais adequada e esta foi ajustada através de um modelo numérico que utiliza entradas físicas mais complexas. O modelo proposto nesse trabalho gerou uma expressão matemática que se mostrou adequada para fornecer um perfil da concentração média de coliformes fecais em uma parte da zona de arrebentação das ondas calculados através do modelo numérico.

Palavras-chave: Diferenças Finitas. Qualidade de água. Equações Diferenciais.

ABSTRACT

This work presents a model for the behavior of the concentration of pathogenic organism in coastal waters. The model introduced in this work is based on analytical solutions of the diffusion-advection equation. It was chosen a more appropriate solution and the solution was adjusted using a numerical model who have more complex inputs. The model proposed on this work generated a expression that was appropriated to provide a profile of the averaged concentration of pathogenics organism in a part of the surf zone calculated using the numerical model.

Key-words: Finite Diferences. Water Quality. Differential Equations.

Lista de Figuras

3.1	Fluxos de Quantidade de Movimento na Zona de Arrebentação	24
4.1	Forçante Gaussiano $t=0,1s$	52
4.2	Forçante Gaussiano $t=10s$	53
4.3	Forçante Gaussiano $t=1000s$	53
4.4	Condição Inicial Como uma Heaviside $t=0,001s$	55
4.5	Condição Inicial Como uma Heaviside $t=1s$	55
4.6	Condição Inicial Como uma Heaviside $t=10s$	56
4.7	Condição Inicial Como uma Heaviside $t=30s$	56
4.8	Condição Inicial Como uma Heaviside e Forçante Gaussiano $t=0,01s$	57
4.9	Condição Inicial Como uma Heaviside e Forçante Gaussiano $t=10s$	58
4.10	Condição Inicial Como uma Heaviside e Forçante Gaussiano $t=1000s$. . .	58
4.11	Perfis da Solução Para Uma Reta Qualquer em y	60
5.1	Solução Numérica \times Solução Analítica $t=1s$	64
5.2	Solução Numérica \times Solução Analítica $t=10s$	65
5.3	Solução Numérica \times Solução Analítica $t=100s$	65
5.4	Solução Numérica \times Solução Analítica $t=1s$	67
5.5	Solução Numérica \times Solução Analítica $t=10s$	67
5.6	Solução Numérica \times Solução Analítica $t=20s$	68
5.7	Batimetria da praia de Matinhos em metros e coornadas UTM	70
5.8	Exemplo de Condição Inicial do Modelo	71
5.9	Simulação $t=10min$	73
5.10	Simulação $t=30min$	73
5.11	Simulação $t=60min$	74
5.12	Simulação $t=120min$	74

5.13	Simulação $t=310\text{min}$	75
5.14	Simulação $t=560\text{min}$	75
5.15	Concentração Média da Zona de Arrebentação ao Longo da Costa em $t=10$ min, $t=30$ min e $t=60$ min	76
5.16	Concentração Média da Zona de Arrebentação ao Longo da Costa em $t=120$ min, $t=240$ min, $t=480$ min e $t=600\text{min}$	77
5.17	Concentração Máxima da Zona de Arrebentação ao Longo da Costa em $t=10$ min, $t=30$ min e $t=60$ min	78
5.18	Concentração Máxima da Zona de Arrebentação ao Longo da Costa em $t=120$ min, $t=240$ min, $t=480$ min e $t=600\text{min}$	79
5.19	Perfil do Regime Permanente para a Concentração Média	80
5.20	Regime Permanente \times Solução Analítica	82
5.21	Perfil da Concentração Máxima \times Solução Analítica	83

Lista de Tabelas

4.1	Problema de C.I e C.C caso A	33
4.2	Problema de C.I e C.C caso B	33
4.3	Problema de C.I e C.C caso C	34
4.4	Problema de C.I e C.C caso D	34
4.5	Problema de C.I e C.C caso E	34
5.1	Erro Máximo da Solução Numérica para Condição Inicial como uma Distribuição Gaussiana	66
5.2	Erro Máximo da Solução Numérica para uma Condição de Contorno Constante	68
5.3	Resultados dos Ensaio Laboratoriais (Escherichia coli - Em NMP/100ml)	69
5.4	Comparações entre a solução analítica ajustada ao regime permanente numérico da concentração média	81
5.5	Comparações entre a solução analítica ajustada ao regime permanente numérico da concentração máxima	82

Sumário

1	Introdução	13
1.1	Objetivos Gerais	14
1.2	Objetivos Específicos	14
1.3	Organização	14
2	Revisão Bibliográfica	16
3	Fundamentação Teórica	19
3.1	Correntes Longitudinais	19
3.2	A Equação da Difusão Advecção com Decaimento de Primeira Ordem . . .	25
3.3	Modelo de Boussinesq	27
3.4	Método Numérico	29
4	Soluções Analíticas	33
4.1	Problemas Difusivos-Advectivos	35
4.1.1	Carga de Poluição Distribuída em um Sistema Limpo	35
4.1.2	Poluentes em uma Região com uma Barreira Física	38
4.1.3	Evolução Temporal de uma Distribuição de Massa	41
4.1.4	Problema com Forçante e Condição Inicial não Homogênea	42
4.1.5	Evolução de uma Carga Conhecida na Fronteira	44
4.2	Exemplos	47
4.2.1	Forçante Constante	48
4.2.2	Forçante como uma Carga Concentrada em um Ponto	49
4.2.3	Entrada Abrupta de um Poluente no Sistema	50
4.2.4	Forçante como uma Distribuição Gaussiana Padrão	50
4.2.5	Condição Inicial Como um Pulso Bidimensional	53

4.2.6	Condição Inicial Como um Pulso Bidimensional e Forçante Gaussiano	56
4.2.7	Forçante Constante na Fronteira	58
4.2.8	Regime Permanente do Problema Semi Infinito com Concentração Conhecida na Fronteira	60
4.2.9	Regime Permanente de um Problema de Difusão Bidimensional . .	61
5	Soluções Numéricas	63
5.1	Validação do Modelo Numérico	63
5.1.1	Condição Inicial Como uma Distribuição Gaussiana	64
5.1.2	Condição de Contorno Constante	66
5.2	Modelo de Decaimento Bacteriano	69
5.3	Simulações e Perfis de Concentração Média e Máxima	72
5.4	Comportamento Estacionário e Comparação com uma Solução Analítica .	79
6	Conclusões e Recomendações	84
7	Bibliografia	86
A	Códigos em Fortran	90

Capítulo 1

Introdução

No litoral paranaense os problemas ambientais decorrentes de uma ocupação humana inadequada já vêm sendo observados há muitos anos, como mostra o artigo [3] de 1984. Esse artigo trata principalmente da erosão das praias e da poluição devido a esgoto doméstico depositados sem tratamento nas praias. Nos últimos anos a poluição das praias paranaenses por organismos patogênicos atingiu um nível crítico. Um exemplo dessa situação foi o resultado na análise de balneabilidade das águas litorâneas na temporada de 2008/2009 na qual de 43 pontos analisados somente 9 foram considerados próprios para banho.

No estado do Paraná a política para determinação de lugares impróprios para banho é baseada na resolução 274/2000 do CONAMA (Conselho Nacional do Meio Ambiente) e funciona da seguinte maneira: coletas de água são feitas em lugares com grande concentração de banhistas ou com grande probabilidade de estarem poluídos. Essas amostras são analisadas com relação à presença de micro-organismos indicadores de contaminação. Se a concentração estiver abaixo de um limite permitido em 80 por cento das amostras, a região é considerada própria para banho. Caso contrário a região é interdita em uma faixa de 200 metros, 100 metros para a direita e 100 metros para a esquerda do ponto analisado. Não está explicitado quais são as considerações utilizadas para escolher esse intervalo de 200m da região contaminada.

Esse trabalho tem como uma motivação inicial a estimativa, com maior exatidão, de qual deve ser o tamanho da vizinhança considerada imprópria para banho, a partir de um ponto de contaminação. Além de saber com mais exatidão quais os intervalos impróprios para banho outra preocupação é em quanto tempo esse tipo de previsão pode ser feita.

Para se lidar com essas questões a proposta desse trabalho é criar um modelo numérico que simula o transporte de organismos patogênicos na zona costeira e juntamente com esse modelo numérico propor uma metodologia para construir expressões matemáticas que consigam replicar com mais rapidez alguns resultados obtidos com as soluções numéricas. Essas expressões matemáticas serão obtidas através de soluções analíticas de problemas de difusão-advecção.

1.1 Objetivos Gerais

Esse trabalho tem como objetivo geral propor uma metodologia para construir expressões matemáticas utilizadas para descrever a concentração de coliformes fecais em regiões costeiras sujeitas a entrada de efluentes contaminados.

1.2 Objetivos Específicos

Este trabalho tem como objetivos específicos os seguintes temas: construir um modelo numérico de advecção-difusão de poluentes na zona costeira, aonde os campos de velocidades da água na zona de arrebentação são dados por um modelo de ondas de Boussinesq. Construir soluções analíticas para casos simplificados do fenômeno estudado e adequar as mesmas aos resultados numéricos através do ajustes nos parâmetros das soluções.

1.3 Organização

Essa dissertação está organizada da seguinte forma: o capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica onde são comentados resumidamente os trabalhos anteriores que servem como referência inicial de vários temas tratados nessa dissertação. O capítulo 3 trata da fundamentação teórica e nele serão apresentados resumidamente as formações de correntes longitudinais através da teoria linear de ondas, a dedução da equação da difusão-advecção usada no trabalho, a apresentação das equações do modelo de Boussinesq usado para simular a hidrodinâmica costeira nesse trabalho e uma descrição resumida do método das diferenças finitas aplicado a problemas difusivos-advectivos. O capítulo 4 trata das soluções analíticas de problemas difusivos-advectivos em uma e duas dimensões.

O capítulo 5 trata da descrição do modelo numérico e os resultados obtidos com o mesmo.
O capítulo 6 trata das conclusões e discussões finais da dissertação.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Os primeiros modelos matemáticos de decaimento bacteriano foram formulados para se estudar a eficiência da remoção de organismos patogênicos em processos de tratamento de águas residuais [20]. Os primeiros trabalhos visavam relacionar a taxa de decaimento bacteriano com fatores externos, sendo eles bióticos ou abióticos. Devido à problemática da poluição costeira por organismos patogênicos, estudos semelhantes aos feitos em processos de tratamento foram feitos para a taxa de decaimento em zonas costeiras.

Nos últimos anos entre os estudos da taxa de decaimento bacteriano em zonas costeiras com um enfoque biológico, podemos citar [12] que fala sobre a possibilidade de sobrevivência da *Escherichia coli* e *Enterococci* em praias subtropicais, [23] que analisa a sobrevivência da *Enterococci* na areia das praias e [2] que lida praticamente com o mesmo tema que [12].

Existem também estudos que visam relacionar a taxa de decaimento bacteriano K com fatores físicos do ambiente. A taxa de decaimento bacteriano é um coeficiente dado pela lei de Chick. A lei de Chick é uma expressão matemática que diz que a taxa de decaimento da concentração bacteriana é relacionada diretamente com a concentração da mesma [6]. O coeficiente de decaimento K pode ser relacionado com outros coeficientes como o T_{90} . O coeficiente T_{90} é definido como o tempo que 90 por cento dos organismos de uma população inicial morrem [25]. O artigo [26] trata da estimativa do coeficiente T_{90} para águas salgadas. O artigo [16] faz uma estimativa experimental sobre o valor do coeficiente K em águas salgadas.

Nos últimos anos muitos modelos de decaimento bacteriano em zonas costeiras foram propostos. Um modelo muito semelhante ao modelo numérico proposto nessa dissertação é

dado em [24]. Ao contrário dos estudos de decaimento bacteriano anteriores, o modelo [24] leva em conta a presença de organismos patogênicos nos sedimentos. Com esse acréscimo, as equações governantes do fenômeno devem contemplar o transporte de sedimentos além do decaimento bacteriano usual dado pela lei de Chick. Com isso a equação diferencial usada para construir o modelo em [24] é a equação da difusão advecção acoplada ao decaimento de primeira ordem. Os procedimentos utilizados para a obtenção da hidrodinâmica costeira não foram explicitados em [24].

Outro modelo foi proposto em [25] que usa o aplicativo DIVAST que foi desenvolvido para simular a hidrodinâmica e a dispersão de solutos e sedimentos em águas costeiras. A parte hidrodinâmica do modelo usa as equações de Navier-Stokes integradas na profundidade. Para o modelo de qualidade da água foi utilizado a equação da difusão-advecção e posteriormente foi utilizada a equação diferencial definida pela lei de Chick para simular o decaimento natural na concentração de coliformes fecais.

Podemos citar também outros aplicativos baseados em modelos numéricos para qualidade de águas costeiras, como o aplicativo MIKE21 desenvolvido pelo DHI que é uma organização internacional de consultoria e pesquisa na área de meio ambiente, água e saúde [4]. O MIKE21 é um aplicativo de engenharia para simulação de escoamentos, ondas, sedimentos e ecologia em rios, lagos, estuários, baías, zonas costeiras e mares. Para as simulações em zonas costeiras o software usa o modelo de Boussinesq para ondas, que é o mesmo modelo de ondas usado nesse trabalho.

Existem também modelos oceânicos e costeiros de grande escala como o SISBAHIA e o POM. O SISBAHIA (Sistema Base de Hidrodinâmica Ambiental) é um sistema de modelos computacionais registrado pela fundação COPPETEC [8]. O POM (Princeton Ocean Model) é um código para gerar modelos oceânicos que foi criado na década de 60 e vem sendo aprimorado desde então [18]. Ambos os modelos não serviriam para simular adequadamente o fenômeno estudado nesse trabalho devido à escala de trabalho ser muito pequena em relação à usada nesses dois modelos.

Uma abordagem teórica dos fenômenos estudados neste trabalho pode ser encontrada em [7]. O capítulo 2 de [7] apresenta deduções e soluções analíticas de algumas equações diferenciais utilizadas neste trabalho.

Existe um outro tipo de problema físico cuja formulação matemática é muito similar ao problema estudado nesse trabalho. Existem muitas soluções analíticas para dispersão

de poluentes na atmosfera. As equações usadas nesse tipo de problema são as mesmas usadas nesse trabalho para a dispersão de poluentes na água. Na literatura existem muitas soluções analíticas para casos idealizados de dispersão atmosférica. Os primeiros trabalhos datam da década de cinquenta com os trabalhos de Rounds e Smith [17]. Nos últimos anos foram desenvolvidas técnicas matemáticas que possibilitaram a obtenção de soluções analíticas para fenômenos mais complexos e fisicamente compatíveis com a realidade física. A técnica mais usada é denominada GILTT (Generalized Integral Laplace Transform Technique), uma exposição detalhada da técnica e dada em [17]. Vale citar também o artigo [27] que mostra um uso da teoria dos grupos de Lie para obter soluções gerais para o problema da difusão advecção bidimensional.

Com relação às correntes longitudinais, os primeiros trabalhos foram desenvolvidos por Longuet Higgins e Stewart que publicaram artigos em 1960, 1961 e 1962; estes artigos tratam das propriedades não lineares das ondas superficiais gravitacionais. Em 1964 os mesmos autores publicaram o artigo [13], que trata especificamente da obtenção das expressões das tensões de radiação e alguns exemplos e aplicações dessas expressões. Em 1970 foi publicado o artigo [14], que trata de como efetivamente calcular o perfil dessas correntes longitudinais através das tensões de radiação.

A equação de Boussinesq padrão foi deduzida pela primeira vez por Peregrine em 1967. Vários modelos numéricos baseados nas equações de Peregrine foram criados com bons resultados ao comparados com dados de campo e também comparados com dados de laboratório [22]. Formas estendidas das equações de Boussinesq foram deduzidas e em 1995; uma forma das equações de Boussinesq conservando todas as não-linearidades nas condições de contorno foi deduzida em [22]. Posteriormente as equações deduzidas em [22] foram aprimoradas para manter ordens mais altas de não-linearidade; esse modelo é apresentado em [9] e [10].

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

Nesse capítulo serão apresentados alguns conceitos importantes para a execução deste trabalho. Na seção 3.1 será apresentada a dedução das equações que possibilitam explicar a formação das correntes longitudinais a partir da teoria linear de ondas. Na seção 3.2 será deduzida a equação da difusão-advecção com decaimento de primeira ordem. Na seção 3.3 serão apresentadas brevemente as equações de Boussinesq utilizadas para simular a hidrodinâmica costeira neste trabalho. E por último, na seção 3.4 será apresentado o método das diferenças finitas aplicado à equação da difusão-advecção.

3.1 Correntes Longitudinais

Na zona de arrebentação das ondas na região costeira, o principal fenômeno causador do transporte de poluentes e sedimentos é a corrente longitudinal causada pela arrebentação das ondas. Essa seção apresenta uma breve exposição da obtenção das expressões da tensão de radiação, que correspondem as tensões aplicadas pelas ondas ao escoamento médio [14]. Ela se origina pela não linearidade do fenômeno que causa, entre outras coisas, um fluxo de massa chamado *corrente média* e um fluxo de quantidade de movimento chamado de *tensões de radiação*. A não linearidade do fenômeno causa outros efeitos, como correntes transversais (cross-shore) e correntes de retorno (rip-currents), mas elas não serão consideradas nesse trabalho. Nesse trabalho não se fez uso de resultados da teoria linear de ondas. Mas a dedução das expressões de tensões de radiação é importante para se entender de maneira clara como surgem as correntes longitudinais.

Vamos começar obtendo a média do fluxo da quantidade de movimento causado por

uma onda progressiva. A elevação da superfície η é dada pela expressão:

$$\eta = a \cos(kx - \omega t) \quad (3.1)$$

Onde a é a amplitude, $H = 2a$ é a altura da onda, $k = \frac{2\pi}{L}$ onde L é o comprimento da onda e $\omega = \frac{2\pi}{T}$ com T sendo o período de onda. Considerando o fundo constante e que a onda está se propagando na direção x que está incidindo normalmente à praia, para calcular o fluxo da quantidade de movimento passando por um plano $x = \text{const}$ nós temos a expressão (3.2):

$$\int_{-h}^{\eta} (P + \rho u^2) dz \quad (3.2)$$

Onde P é a pressão hidrostática, u é a velocidade do fluido na direção x , ρ é a densidade do fluido, $-h$ é a profundidade que representa o fundo e η é a superfície livre do fluido. Para facilitar a notação, a média em um período de tempo de uma grandeza qualquer $H(t)$ é definida como:

$$\overline{H(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T H(t) dt \quad (3.3)$$

Usando a notação acima nós definimos a componente principal S_{xx} da tensão de radiação como a média da expressão (3.2) com relação ao tempo, menos o fluxo médio do fluido na ausência da onda.

$$S_{xx} = \overline{\int_{-h}^{\eta} (P + \rho u^2) dz} - \int_{-h}^0 P_0 dz \quad (3.4)$$

Onde P_0 é a pressão hidrostática na ausência da onda. A expressão (3.4) pode ser escrita como:

$$S_{xx} = \overline{\int_{-h}^{\eta} (P + \rho u^2) dz} - \frac{\rho g h^2}{2} \quad (3.5)$$

Definindo a pressão dinâmica como $Pd = P + \rho g z$ onde g é a aceleração da gravidade, podemos expressar (3.5) como:

$$S_{xx} = \overline{\int_{-h}^{\eta} (Pd + \rho u^2) dz} - \overline{\int_{-h}^{\eta} (\rho g z) dz} - \frac{\rho g h^2}{2} \quad (3.6)$$

Depois de efetuada uma integração em z a expressão (3.6) pode ser escrita como:

$$S_{xx} = \overline{\int_{-h}^{\eta} (Pd + \rho u^2) dz} - \frac{\rho g \eta^2}{2} \quad (3.7)$$

Para efeito de simplificação a expressão acima pode ser escrita como:

$$S_{xx} = S_m + S_p \quad (3.8)$$

Onde:

$$S_m = \overline{\int_{-h}^{\eta} (\rho u^2) dz} \quad (3.9)$$

$$S_p = \overline{\int_{-h}^{\eta} (Pd) dz} - \frac{\rho g \eta^2}{2} \quad (3.10)$$

A parte S_m pode ser decomposta em:

$$S_m = \overline{\int_{-h}^0 (\rho u^2) dz} + \overline{\int_0^{\eta} (\rho u^2) dz} \quad (3.11)$$

A velocidade u , na teoria linear é definida somente até $z = 0$ por isso para $z > 0$ uma opção é desenvolver u em série de Taylor em torno de $z = 0$ e desconsiderar os termos de ordem alta. Com isso a expressão (3.11) pode ser escrita como:

$$S_m = \overline{\int_{-h}^0 (\rho u^2) dz} + O\left(\frac{H}{L}\right)^3 \quad (3.12)$$

Na teoria linear nós temos:

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(\omega t - kx) \quad (3.13)$$

$$u = \frac{ckH}{2} \frac{\cosh(kz + kh)}{\sinh(kh)} \cos(\omega t - kx) \quad (3.14)$$

$$w = -\frac{ckH}{2} \frac{\sinh(kz + kh)}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx) \quad (3.15)$$

Onde $k = \frac{2\pi}{L}$ com L sendo o comprimento da onda, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ com T sendo o período da onda, $H = 2a$ com a sendo a amplitude da onda e w sendo a velocidade vertical das partículas de fluido devido à onda. Integrando a equação (3.12) e usando (3.14) nós temos:

$$S_m = \frac{\rho}{8 \sinh^2(kh)} \left(\frac{H\pi}{T} \right) \left(\frac{\sinh(2kh)}{2k} + 2h \right) \quad (3.16)$$

A expressão acima pode ser escrita como:

$$S_m = \frac{\rho g H^2}{16} (1 + G) \quad (3.17)$$

onde:

$$G = \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \quad (3.18)$$

Para calcular a parte S_p podemos usar primeiramente a seguinte igualdade:

$$\overline{\int_{-h}^{\eta} (Pd) dz} = -\overline{\int_{-h}^{\eta} (\rho w^2) dz} + \rho g \overline{\eta^2} \quad (3.19)$$

Integrando a equação 3.19 com w representado pela expressão (3.15) e substituindo o seu resultado na expressão de S_p nós obtemos:

$$S_p = \frac{\rho g H^2 G}{16} \quad (3.20)$$

Com isso nós temos:

$$S_{xx} = S_m + S_p = \frac{\rho g H^2}{16} (1 + 2G) + O\left(\frac{H}{L}\right)^3 \quad (3.21)$$

O resultado acima fornece o fluxo da quantidade de movimento na direção x causado por uma onda propagante com ângulo de incidência nulo ou seja, a onda está incidindo paralelamente ao vetor normal à costa. De modo análogo existe a possibilidade de calcular o fluxo de quantidade de movimento x na direção y denotado por S_{xy} , quantidade de movimento y na direção x denotado por S_{yx} e quantidade de movimento y na direção y dado por S_{yy} . Generalizando a expressão (3.7) para uma onda incidindo com ângulo α em relação ao vetor normal às praia nós temos em notação indicial:

$$S_{ij} = \overline{\int_{-h}^{\eta} (\rho u_i u_j - \delta_{ij} w^2) dz} + \frac{\delta_{ij} \rho g \eta^2}{2} \quad (3.22)$$

Com $u_x = \|u\| \cos(\alpha)$, $u_y = \|u\| \sin(\alpha)$ e δ_{ij} sendo o delta de Kronecker. Seja \mathbf{E}_{ij} a matriz:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

É possível escrever a expressão (3.22) como:

$$S_{ij} = E_{ij} \overline{\int_{-h}^{\eta} (\rho u^2) dz} + \delta_{ij} \overline{\int_{-h}^{\eta} -w^2 dz} + \frac{\delta_{ij} \rho g \eta^2}{2} \quad (3.24)$$

A expressão (3.24) então pode ser escrita como:

$$S_{ij} = E_{ij} S_m + \delta_{ij} S_p \quad (3.25)$$

Com isso nós podemos calcular as quantidades S_{xy} e S_{yx} que são respectivamente o fluxo da quantidade de movimento y na direção x e o fluxo da quantidade de movimento x na direção y . Essas duas quantidades são dadas por:

$$S_{xy} = S_{yx} = \frac{\rho g H^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) (1 + G)}{16} \quad (3.26)$$

Para se verificar a formação das correntes longitudinais através das expressões acima é necessário fazer um balanço dos fluxos de quantidade de movimento na zona de arrebentação. Usando uma região de controle de área $\Delta x \Delta y$ nós temos a figura 3.1 :

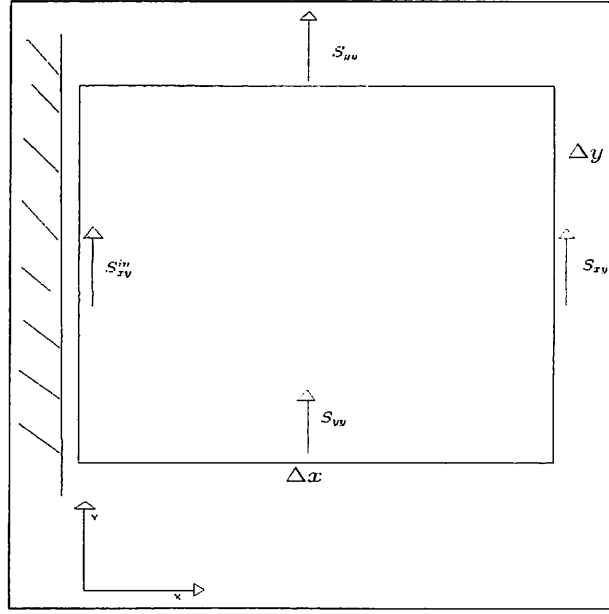


Figura 3.1: Fluxos de Quantidade de Movimento na Zona de Arrebentação

Na figura 3.1 S_{xy} é a quantidade de movimento y na direção x antes da zona de arrebentação e S_{xy}^{in} é a mesma grandeza, só que dessa vez calculada depois da zona de arrebentação. Fazendo um balanço das forças exercidas nesse volume de controle na direção y associadas a essas tensões nós temos:

$$\sum F_y = S_{yy}\Delta xh - S_{yy}\Delta xh + S_{xy}\Delta yh - S_{xy}^{in}\Delta yh \quad (3.27)$$

Onde h é o fundo da praia. Com a expressão acima nós temos:

$$\sum F_y = S_{xy}\Delta yh - S_{xy}^{in}\Delta yh \quad (3.28)$$

Considerando que depois da zona de arrebentação a energia da onda está quase toda dissipada e com isso temos que $S_{xy}^{in} = 0$. E finalmente nós temos:

$$\sum F_y = S_{xy}\Delta yh \quad (3.29)$$

A presença de uma força não nula na direção y causaria uma aceleração no fluido. Essa aceleração não acontece porque essas tensões são igualadas por forças de atrito com o fundo e com isso o escoamento paralelo a costa acontece com velocidade uniforme. A esse movimento do fluido se dá o nome de *corrente longitudinal*.

3.2 A Equação da Difusão Advecção com Decaimento de Primeira Ordem

Nessa seção nós iremos deduzir a equação diferencial que rege o fenômeno estudado. Dado um volume de controle retangular com dimensões $\mathcal{V} = \delta x \delta y \delta z$, esse volume de controle está sujeito a um escoamento bidimensional cuja velocidade na direção x é dada por $U(x, y, t)$ e a velocidade na direção y é dada por $V(x, y, t)$. Pelo principio da conservação da massa, no volume de controle, dada uma substância qualquer nós devemos ter:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = F_{en} - F_{sa} \quad (3.30)$$

Onde F_{en} é o fluxo de massa entrando no volume e F_{sa} é o fluxo de massa saindo do volume. O fluxo de massa na direção x é construído por um balanço entre o fluxo de massa das duas faces perpendiculares ao eixo x :

$$f_x = \left(UC - \frac{D\partial C}{\partial x} \right)_1 \delta z \delta y - \left(UC - \frac{D\partial C}{\partial x} \right)_2 \delta z \delta y \quad (3.31)$$

Na expressão (3.31) os índices 1 e 2 representam em quais faces as grandezas entre parenteses estão sendo consideradas. Os termos $UC\delta z\delta y$ representam o fluxo de massa causado pelo escoamento e os termos $\frac{D\partial C}{\partial x}$ vêm da lei de Fick que representa o fluxo de massa causado por difusão turbulenta. Como δx é infinitesimalmente pequeno é possível calcular $(UC)_2$ usando a primeira aproximação da série de Taylor de UC centrada na face 1:

$$(UC)_2 = (UC)_1 + \frac{\partial(UC)_1}{\partial x} \delta x \quad (3.32)$$

Com isso nós temos:

$$(UC)_1 - (UC)_2 = -\frac{\partial(UC)_1}{\partial x} \delta x \quad (3.33)$$

De maneira análoga nós temos:

$$\left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right)_2 = \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 \delta x \quad (3.34)$$

Substituindo (3.33) e (3.34) em (3.31) nós temos:

$$f_x = -\frac{\partial(UC)_1}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 \delta x \delta y \delta z \quad (3.35)$$

Usando um processo análogo para o fluxo de massa na direção y nós temos:

$$f_y = -\frac{\partial(VC)_1}{\partial y} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} \right)_1 \delta x \delta y \delta z \quad (3.36)$$

Por suposição a substância analisada sofre uma perda de massa espontânea proporcional a concentração da mesma. Com isso o balanço total de massa é dado por:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = f_x + f_y - KCV + FV \quad (3.37)$$

Onde K é o coeficiente de decaimento da substância dado pela lei de Chick, C é a concentração da substância no volume de controle e V é o volume do volume de controle. O termo F é um acréscimo devido a alguma carga externa. Com isso a expressão (3.37) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \left(-\frac{\partial(UC)_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 - \frac{\partial(VC)_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} \right)_1 + F - KC \right) \delta x \delta y \delta z \quad (3.38)$$

Dividindo ambos os lados de (3.38) pelo volume $\delta x \delta y \delta z$ nós obtemos a equação bidimensional da difusão advecção com decaimento de primeira ordem.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial(UC)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial(VC)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} \right) + F - KC \quad (3.39)$$

Pelo regra da derivada do produto de funções, nós temos a seguinte igualdade:

$$\frac{\partial(UC)}{\partial x} + \frac{\partial(VC)}{\partial y} = \frac{\partial(C)}{\partial x} U + \frac{\partial(C)}{\partial y} V + \left(\frac{\partial(U)}{\partial x} + \frac{\partial(V)}{\partial y} \right) C \quad (3.40)$$

Mas pelo princípio da conservação da massa nós temos:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3.41)$$

Com isso a expressão (3.39) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \nabla \cdot (D \nabla C) - KC + F(x, y, t) \quad (3.42)$$

3.3 Modelo de Boussinesq

As equações de Boussinesq diferem da teoria linear para ondas longas porque acrescentam efeitos não lineares de baixa ordem e com isso oferecem uma aproximação na simulação de ondas em zonas costeiras [22]. Nessa seção será apresentada brevemente uma dedução das equações usadas para simular a hidrodinâmica costeira nesse trabalho. As equações de Boussinesq são resolvidas numericamente e o campo de velocidades será calculado usando o modelo FUNWAVE desenvolvido no *Center for Applied Coastal Research* da Universidade de Delaware.

Supondo a irrotacionalidade do escoamento, existe um campo escalar tal que o gradiente desse campo escalar é um campo vetorial que define as velocidades do fluido. Com isso o problema de calcular expressões que definem as velocidades do fluido sujeito à passagem de uma onda se resume a achar qual é esse potencial de velocidades. Definindo esse potencial de velocidades como Φ e considerando o princípio de conservação da massa e o princípio de conservação da quantidade de movimento nós temos o seguinte problema já adimensionalizado [22]:

$$\Phi_{zz} + \mu^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad -h \leq z \leq \delta\eta \quad (3.43)$$

Sujeito às condições:

$$\Phi_z + \mu^2 \nabla h \cdot \nabla \Phi = 0, \quad z = -h \quad (3.44)$$

$$\eta + \Phi_t + \frac{1}{2} \left[(\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{\mu^2} (\Phi_z)^2 \right] = 0, \quad z = \delta\eta \quad (3.45)$$

$$\eta_t + \delta \nabla \Phi \cdot \nabla \eta - \frac{1}{\mu^2} \Phi_z = 0, \quad z = \delta \eta \quad (3.46)$$

Onde η é a função que representa a superfície livre, μ é um parâmetro de adimensionalização dado por $\mu = k_0 h_0$ com h_0 sendo a profundidade e δ é definido como $\delta = \frac{a}{h_0}$, com a sendo a amplitude da onda.

Integrando a expressão (3.43) em z de $-h$ até $\delta \eta$ e usando as expressões (3.44) e (3.46) é possível achar uma expressão para a conservação de fluxo de volume:

$$\eta_t + \nabla \cdot M = 0 \quad (3.47)$$

Onde:

$$M = \int_{-h}^{\delta \eta} \nabla \Phi dz \quad (3.48)$$

O próximo passo é usar a expressão (3.47) para obter expressões para conservação da massa e usar a expressão (3.45) para calcular a quantidade de movimento.

Em águas rasas é possível expandir o potencial de velocidades Φ em uma série que conserva termos de ordem $O(\mu^2)$.

$$\Phi = \Phi_0(x, t) - \mu^2(h + z) \nabla h \cdot \nabla \Phi_0 - \mu^2 \frac{(h + z)^2}{2} \nabla^2 \Phi_0 + O(\mu^4) \quad (3.49)$$

Na expressão (3.49) Φ_0 representa a função Φ em $z = -h$. Com a expressão (3.49) é possível então calcular o potencial Φ em qualquer ponto da coluna d'água. Seja Φ_α o valor de Φ em uma altura $z = z_\alpha(x, y)$.

$$\Phi_\alpha = \Phi_0(x, t) - \mu^2(h + z_\alpha) \nabla h \cdot \nabla \Phi_0 - \mu^2 \frac{(h + z_\alpha)^2}{2} \nabla^2 \Phi_0 + O(\mu^4) \quad (3.50)$$

Com a expressão (3.50) combinada com (3.49) é possível expressar Φ em termos de Φ_α .

$$\Phi = \Phi_\alpha - \mu^2(z_\alpha - z) \nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha) - \mu^2 \frac{z_\alpha^2 - z^2}{2} \nabla^2 \Phi_\alpha + O(\mu^4) \quad (3.51)$$

Seja $\nabla\Phi(z_\alpha) = u_\alpha$, substituindo (3.51) em (3.47) e mantendo os termos de ordem $O(\mu^2)$ uma nova expressão para o fluxo de volume é obtida:

$$M = (h + \delta\eta)[u_\alpha + \mu^2\{\frac{1}{2}z_\alpha^2 - \frac{1}{6}(h^2 + h\delta\eta + (\delta\eta)^2)]\nabla(\nabla \cdot u_\alpha) + \\ + [z_\alpha + \frac{1}{2}(h + \delta\eta)]\nabla(\nabla \cdot (hu_\alpha))\} + O(\mu^4) \quad (3.52)$$

Substituindo (3.51) em (3.45) é possível obter uma expressão para a quantidade de movimento dada por:

$$u_{\alpha t} + \delta(u_\alpha \cdot \nabla)u_\alpha + \nabla\eta + \mu^2V_1 + \delta\mu^2V_2 = O(\mu^4) \quad (3.53)$$

Onde:

$$V_1 = \frac{1}{2}z_\alpha^2\nabla(\nabla \cdot u_{\alpha t}) + z_\alpha\nabla(\nabla \cdot (hu_{\alpha t})) - \nabla[\frac{1}{2}(\delta\eta)^2\nabla \cdot u_{\alpha t} + \delta\eta\nabla \cdot (hu_{\alpha t})] \quad (3.54)$$

$$V_2 = \nabla[(z_\alpha - \delta\eta)(u_\alpha \cdot \nabla)(\nabla \cdot (hu_\alpha)) + \frac{1}{2}(z_\alpha^2 - (\delta\eta)^2)(u_\alpha \cdot \nabla)(\nabla \cdot u_\alpha) + \\ + \frac{1}{2}\nabla[(\nabla \cdot (hu_\alpha) + \delta\eta\nabla \cdot u_\alpha)^2] \quad (3.55)$$

As equações (3.52) e (3.53) são as equações de Boussinesq não lineares que geraram os campos de velocidades usados nesse trabalho. Esse trabalho não desenvolveu nenhuma solução numérica para as equações de Boussinesq, apenas utilizou campos de velocidades geradas previamente por uma solução dessas equações.

3.4 Método Numérico

O método numérico utilizado para resolver as equações diferenciais de advecção-difusão presentes nesse trabalho foi o Método das Diferenças Finitas. Essa método consiste em aproximar as derivadas da equação diferencial do problema através do truncamento da série de Taylor da função [11]. O domínio do problema é então limitado e discretizado para futura imposição das condições iniciais e de contorno. O primeiro passo é aproximar as derivadas da equação diferencial que rege o domínio que é dada por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \nabla \cdot (D \nabla C) - KC + Q(x, y, t) \quad (3.56)$$

Na expressão (3.56) K representa o coeficiente de decaimento bacteriano, U e V representam as velocidades do fluido nas direções x e y respectivamente, D representa o coeficiente de difusividade e $Q(x, y, t)$ é uma distribuição de carga de poluentes entrando no sistema.

Vamos começar lidando com a derivada temporal de (3.56). Usando diferenças progressivas na derivada temporal nós temos:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C(x, y, t + \Delta t) - C(x, y, t)}{\Delta t}$$

Para as derivadas espaciais de primeira ordem foram utilizadas diferenças centrais:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x + \Delta x, y, t) - C(x - \Delta x, y, t)}{2\Delta x}$$

e

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{C(x, y + \Delta y, t) - C(x, y - \Delta y, t)}{2\Delta y}$$

As derivadas espaciais de segunda ordem foram aproximadas por diferenças centrais.

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{C(x + \Delta x, y, t) - 2C(x, y, t) + C(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{C(x, y + \Delta y, t) - 2C(x, y, t) + C(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2}$$

Para simplificação da escrita e para posterior discretização do domínio vamos mudar a notação das aproximações das derivadas.

$$C(x + \Delta x, y, t) = C^{\Delta x}$$

$$C(x - \Delta x, y, t) = C^{-\Delta x}$$

$$C(x, y + \Delta y, t) = C^{\Delta y}$$

$$C(x, y - \Delta y, t) = C^{-\Delta y}$$

$$C(x, y, t + \Delta t) = C^{\Delta t}$$

$$C(x, y, t) = C$$

$$Q(x, y, t) = Q$$

Substituindo as aproximações em (3.56) e sabendo que $D(x, y, t)$ é uma função conhecida nós temos:

$$\begin{aligned} C^{\Delta t} = & C^{\Delta x} \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\frac{\partial D}{\partial x} - U \right) + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \right) + C^{\Delta y} \left(\frac{\Delta t}{2\Delta y} \left(\frac{\partial D}{\partial y} - U \right) + \frac{D\Delta t}{\Delta y^2} \right) + \\ & + C^{-\Delta x} \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(-\frac{\partial D}{\partial x} + U \right) + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \right) + C^{-\Delta y} \left(\frac{\Delta t}{2\Delta y} \left(-\frac{\partial D}{\partial y} + V \right) + \frac{D\Delta t}{\Delta y^2} \right) \quad (3.57) \\ & + C \left(-\frac{2D\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{2D\Delta t}{\Delta y^2} - K\Delta t + 1 \right) + Q\Delta t \end{aligned}$$

Com a relação acima é possível calcular o valor da função C no tempo $(t_0 + \Delta t)$ a partir dos valores dados em um tempo (t_0) . Podemos observar que o valor de $C(x, y, t + \Delta t)$ também depende dos valores de $C(x + \Delta x, y, t)$, $C(x, y + \Delta y, t)$, $C(x - \Delta x, y, t)$ e $C(x, y - \Delta y, t)$. Por isso para resolver a equação (3.56) pelo método das diferenças finitas nós optamos por limitar o domínio do problema em uma região finita e supor conhecido o comportamento da solução no contorno do domínio. Sendo assim para o modelo numérico nós escolhemos o seguinte formalismo matemático:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \nabla \cdot (D \nabla C) - KC + Q(x, y, t) \quad \begin{array}{l} x \in (0, A), y \in (0, B) \\ t \in (0, \infty) \end{array} \quad (3.58)$$

$$C(x, y, 0) = f(x, y) \quad (3.59)$$

$$C(x, 0, t) = 0 \quad (3.60)$$

$$C(x, B, t) = 0 \quad (3.61)$$

$$C(A, y, t) = 0 \tag{3.62}$$

$$\frac{\partial C(0, y, t)}{\partial x} = 0 \tag{3.63}$$

Os valores A e B presentes nas condições (3.61) e (3.62) são valores suficientemente grandes para o contorno não ter influência determinante no domínio, essa é uma imposição necessária pois em última instância o nosso fenômeno se dá em um domínio infinito. Com as condições iniciais e de contorno estabelecidas por (3.59)-(3.63) e a equação (3.58) sendo representada por (3.57) o fenômeno já pode ser simulado numericamente. O apêndice A contém o código em linguagem Fortran para a solução do modelo numérico presente nesta seção.

Capítulo 4

Soluções Analíticas

Nesse capítulo serão apresentadas algumas soluções analíticas de problemas de difusão-advecção que podem ser úteis para aproximar o fenômeno estudado nesse trabalho. Na seção 4.1 são deduzidas as soluções gerais de alguns problemas bidimensionais. Na seção 4.2 são mostrados alguns casos particulares das soluções dadas na seção 4.1.

Serão apresentadas soluções gerais para cinco cenários físicos diferentes. As tabelas 4.1-4.5 apresentam um esquema de como são definidos esses cinco casos.

Tabela 4.1: Problema de C.I e C.C caso A

Caso A			
Operador	Domínio	C.C e C.I	Seção
$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \nabla^2 C - KC + Q(x, y, t)$	$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $t \in (0, \infty)$	$\lim_{ x \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0$ $\lim_{ y \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0$ $C(x, y, 0) = 0$	4.1.1

Tabela 4.2: Problema de C.I e C.C caso B

Caso B			
Operador	Domínio	C.C e C.I	Seção
$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} = D \nabla^2 C - KC + Q(x, y, t)$	$(x, t) \in (0, \infty)$ $y \in (-\infty, \infty)$	$\lim_{ y \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0$ $C(x, y, 0) = 0$ $\frac{\partial C(0, y, t)}{\partial x} = 0$	4.1.2

Tabela 4.3: Problema de C.I e C.C caso C

Caso C			
Operador	Domínio	C.C e C.I	Seção
$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \nabla^2 C - KC$	$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $t \in (0, \infty)$	$\lim_{ x \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0$ $\lim_{ y \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0$ $C(x, y, 0) = C_0(x, y)$	4.1.3

Tabela 4.4: Problema de C.I e C.C caso D

Caso D			
Operador	Domínio	C.C e C.I	Seção
$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \nabla^2 C - KC + Q(x, y, t)$	$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $t \in (0, \infty)$	$\lim_{ x \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0$ $\lim_{ y \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0$ $C(x, y, 0) = C_0(x, y)$	4.1.4

Tabela 4.5: Problema de C.I e C.C caso E

Caso E			
Operador	Domínio	C.C e C.I	Seção
$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} = D \nabla^2 C - KC$	$(y, x, t) \in (0, \infty)$	$\lim_{ x \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0$ $\lim_{y \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0$ $C(x, y, 0) = 0$ $C(x, 0, t) = C_0(x, t)$	4.1.5

Na seção 4.2 serão apresentados nove exemplos de casos particulares das soluções apresentadas em 4.1. O exemplo da seção 4.2.1 trata do caso A quando $Q(x, y, t) = Q_0$ é constante. A seção 4.2.2 trata do caso A com $V = U = K = 0$ e $Q(x, y, t) = \delta(x, y)$. A seção 4.2.3 trata do caso A com $Q(x, y, t) = \delta(x, y, t)$. A seção 4.2.4 trata do caso A com $V = U = K = 0$ e $Q(x, y, t) = \exp(-(x^2 + y^2))$. A seção 4.2.5 trata do caso C com $C_0 = H(x+1, y+1) - H(x-1, y-1)$. A seção 4.2.6 trata do caso D com $U = V = K = 0$, $Q(x, y, t) = \exp(-(x^2 + y^2))$ e $C_0 = H(x+1, y+1) - H(x-1, y-1)$. A seção 4.2.7 trata do caso E com $C_0(x, t) = C_0$ constante. A seção 4.2.8 trata da solução da seção 4.2.7 quando

o tempo tende ao infinito. A seção 4.2.9 trata do caso E com $C_0 = H(x - 5) - H(x - 10)$, $V = K = 0$ e o tempo tendendo ao infinito.

4.1 Problemas Difusivos-Advectivos

Nessa seção nós estudaremos algumas soluções analíticas de problemas difusivos-advectivos em domínios bidimensionais infinitos e semi infinitos. Todas as equações diferenciais desse capítulo são derivadas da equação (3.39) com U , V e D constantes. Em todos os problemas desse capítulo nós vamos considerar o eixo y paralelo à linha costeira e o eixo x normal à linha costeira. As constantes U e V representam as velocidades de escoamento da água nas direções x e y respectivamente.

4.1.1 Carga de Poluição Distribuída em um Sistema Limpo

O problema analisado a seguir representa o comportamento da concentração C de algum escalar em um fluido tal que o coeficiente de difusividade desse escalar no fluido é dado por D . Inicialmente não existe nenhuma concentração do escalar no domínio ou seja $C(x, y, 0) = 0$ e existe uma carga externa lançada no domínio dado pela função $Q(x, y, t)$. O fluido submetido à um escoamento definido pelas velocidades U e V . Por considerações físicas é conveniente considerar que a concentração tende a zero quando calculada muito longe da fonte externa. Com todas as suposições feitas o problema é dado matematicamente por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \nabla^2 C - KC + Q(x, y, t) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in (0, \infty) \quad (4.1)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0 \quad (4.2)$$

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0 \quad (4.3)$$

$$C(x, y, 0) = 0 \quad (4.4)$$

Pelas condições (4.2) e (4.3) e impondo restrições ao forçante $Q(x, y, t)$ é razoável supor que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |C(x, y, t)| dx dy < \infty \quad (4.5)$$

Por (4.5) é possível aplicar a transformada dupla de Fourier em (4.1). Devido à condição (4.4), existe a possibilidade de aplicar a transformada de Laplace na equação diferencial. Juntando as transformadas nós temos:

$$\mathcal{T}\{f(x, y, t)\} = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-st - i\omega_1 x - i\omega_2 y] f(x, y, t) dx dy dt \quad (4.6)$$

Aplicando \mathcal{T} em 4.1 e considerando $\mathcal{T}\{Q(x, y, t)\} = \bar{\bar{Q}}(\omega_1, \omega_2, s)$, $\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ e $\mathcal{T}\{C(x, y, t)\} = \Psi(\omega_1, \omega_2, s)$ nós obtemos a seguinte expressão:

$$s\Psi - \hat{C}(\omega_1, \omega_2, 0) + i\omega_1 U\Psi + i\omega_2 V\Psi = D(-\omega_1^2 - \omega_2^2)\Psi - K\Psi + \bar{\bar{Q}}(\omega_1, \omega_2, s) \quad (4.7)$$

Onde

$$\hat{C}(\omega_1, \omega_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\omega_1 x - i\omega_2 y] C(x, y, t) dx dy$$

Por (4.4) é possível expressar (4.7) como:

$$\Psi(\omega_1, \omega_2, s) = \frac{1}{(s + i\omega_1 U + i\omega_2 V + D\omega_1^2 + D\omega_2^2 + K)} \bar{\bar{Q}}(\omega_1, \omega_2, s) \quad (4.8)$$

Basta agora aplicar a transformação inversa \mathcal{T}^{-1} em (4.8). É possível verificar que:

$$\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{F}_x^{-1} \circ \mathcal{F}_y^{-1} \quad (4.9)$$

Onde \circ representa a operação de composição, \mathcal{L}^{-1} é a transformada inversa de Laplace no tempo, \mathcal{F}_x^{-1} é a transformada inversa de Fourier em x e \mathcal{F}_y^{-1} é a transformada inversa de Fourier em y .

Aplicando \mathcal{L}^{-1} em (4.8) e considerando a propriedade da translação e convolução de Laplace nós temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\Psi\} = \int_0^t \exp[-A(t-\tau)] \widehat{Q}(\omega_1, \omega_2, \tau) d\tau \quad (4.10)$$

Onde $A = (U i \omega_1 + V i \omega_2 + D(\omega_2^2 + \omega_1^2) + K)$. Aplicando a transformada inversa de Fourier em x na equação (4.10), pelo teorema da convolução e pelo teorema de Fubini [5] nós temos:

$$\mathcal{F}_x^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}\{\Psi\}\} = \int_0^t \mathcal{F}^{-1}\{\exp[-A(t-\tau)]\} * \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{Q}(\omega_1, \omega_2, \tau)\} d\tau \quad (4.11)$$

A primeira inversa da expressão (4.11) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x^{-1}\{\exp[-A(t-\tau)]\} &= \exp[B] \times \\ &\times \mathcal{F}_x^{-1}\{\exp[-i\omega_1 U(t-\tau) - D\omega_1^2(t-\tau)]\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Onde $B = V i \omega_2 - D\omega_2^2(t-\tau) - K(t-\tau)$. A inversa da direita de (4.12) pelo teorema da convolução de Fourier pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x^{-1}\{\exp[-i\omega_1 U(t-\tau) - D\omega_1^2(t-\tau)]\} &= \mathcal{F}_x^{-1}\{\exp[-i\omega_1 U(t-\tau)]\} * \\ &* \mathcal{F}_x^{-1}\{\exp[-D\omega_1^2(t-\tau)]\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

A expressão (4.13) então pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x^{-1}\{\exp[-i\omega_1 U(t-\tau) - D\omega_1^2(t-\tau)]\} &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - U(t-\tau)) \frac{\exp\left[\frac{-(x-\xi)^2}{4D(t-\tau)}\right]}{2\sqrt{D\pi(t-\tau)}} d\xi \end{aligned} \quad (4.14)$$

Substituindo (4.12)-(4.14) em (4.11):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x^{-1}\{\mathcal{L}^{-1}\{\Psi\}\} &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{Q}(\xi, \omega_2, \tau) \exp[B] \times \\ &\times \frac{\exp\left[\frac{-(x-\xi-U(t-\tau))^2}{4D(t-\tau)}\right]}{2\sqrt{D\pi(t-\tau)}} d\xi d\tau \end{aligned} \quad (4.15)$$

Aplicando a transformada inversa em y na expressão (4.15):

$$C(x, y, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_y^{-1} \left\{ \widehat{Q}(\xi, \omega_2, \tau) \exp[-V i \omega_2 - D \omega_2^2(t - \tau) - K(t - \tau)] \right\} \times \frac{\exp \left[\frac{-(x - \xi - U(t - \tau))^2}{4D(t - \tau)} \right]}{2\sqrt{D\pi(t - \tau)}} d\xi d\tau \quad (4.16)$$

Usando repetidamente o teorema da convolução de Fourier, a propriedade da linearidade da transformada inversa de Fourier e o teorema de Fubini nós obtemos:

$$C(x, y, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi, \lambda, \tau) \frac{\exp \left[-K(t - \tau) - \frac{(y - \lambda - V(t - \tau))^2}{4D(t - \tau)} \right]}{2\sqrt{D\pi(t - \tau)}} \times \frac{\exp \left[\frac{-(x - \xi - U(t - \tau))^2}{4D(t - \tau)} \right]}{2\sqrt{D\pi(t - \tau)}} d\lambda d\xi d\tau \quad (4.17)$$

Com isso a solução para o problema é dada por:

$$C(x, y, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\xi, \lambda, \tau)}{4D\pi(t - \tau)} \exp \left[-K(t - \tau) - \frac{(y - \lambda - V(t - \tau))^2}{4D(t - \tau)} \right] \times \exp \left[-\frac{(x - \xi - U(t - \tau))^2}{4D(t - \tau)} \right] d\lambda d\xi d\tau \quad (4.18)$$

A integral acima tem expressão analítica dependendo da função Q . Neste capítulo serão mostrados alguns exemplos de soluções para diferentes tipos de forçantes.

4.1.2 Poluentes em uma Região com uma Barreira Física

Esse problema é semelhante ao da seção 4.1.1 mas existe uma barreira física no eixo $x = 0$. Essa barreira pode ser interpretada como uma barreira rochosa ou mesmo uma parede devido a alguma construção humana na zona costeira. Matematicamente essa barreira pode ser incluída no problema através da condição de contorno (4.23). Nesse caso não existe velocidade na direção perpendicular à praia. Com isso o problema é dado por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} = D \nabla^2 C - KC + Q(x, y, t) \quad (x, t) \in (0, \infty), \quad y \in (-\infty, \infty) \quad (4.19)$$

Sujeito às condições:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0 \quad (4.20)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0 \quad (4.21)$$

$$C(x, y, 0) = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial C(0, y, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.23)$$

Para se lidar com a condição de contorno (4.23) pode-se aplicar o método das imagens. Primeiro deve se estudar o comportamento da solução quando estendemos o domínio do problema em x para $(-\infty, \infty)$. No domínio estendido separa-se a equação na sua parte simétrica e anti-simétrica em relação ao eixo $x=0$. Essa separação pode ser feita sem nenhum problema pois o espaço vetorial das funções reais é uma soma direta do espaço das funções pares e ímpares. Ao se estender o problema devemos também estender o forçante $Q(x, y, t)$, em um primeiro momento essa extensão no forçante é feita de modo arbitrário.

$$C(x, y, t) = S(x, y, t) + A(x, y, t) \quad (4.24)$$

Onde, $S(x, -y, t) = S(x, y, t)$ e $A(x, -y, t) = -A(x, y, t)$. Aplicando (4.24) em (4.19):

$$\frac{\partial(S + A)}{\partial t} + U \frac{\partial(S + A)}{\partial x} = D \nabla^2(S + A) - K(S + A) + Q_{ext}(x, y, t) \quad (4.25)$$

Seja E1 e E2 funções pares e O1 e O2 funções ímpares. Existe a relação:

$$E1 + O1 = E2 + O2 \rightarrow E1 = E2 \text{ e } O1 = O2$$

Usando a relação acima podemos separar a expressão (4.25) e as condições iniciais e de contorno em suas partes simétricas e anti-simétricas. O forçante estendido também é

separado em relação às suas parte simétrica e anti-simétrica, as partes simétrica e anti-simétrica do forçante são denotadas respectivamente por: $sQ_{ext}(x, y, t)$ e $aQ_{ext}(x, y, t)$. Com isso obtemos dois problemas desacoplados. O problema simétrico:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial y} = D \nabla^2 S - K S + sQ_{ext}(x, y, t) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in (0, \infty) \quad (4.26)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} S(x, y, t) = 0 \quad (4.27)$$

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} S(x, y, t) = 0 \quad (4.28)$$

$$S(x, y, 0) = 0 \quad (4.29)$$

E o problema anti-simétrico:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial y} = D \nabla^2 A - K A + aQ_{ext}(x, y, t) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in (0, \infty) \quad (4.30)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} A(x, y, t) = 0 \quad (4.31)$$

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} A(x, y, t) = 0 \quad (4.32)$$

$$A(x, y, 0) = 0 \quad (4.33)$$

Ao se estender o problema no eixo $x = 0$ pode-se estender o forçante $Q(x, y, t)$ arbitrariamente. Se o forçante estendido for simétrico em $x = 0$, então $aQ_{ext}(x, y, t) = 0$ e o problema anti-simétrico tem somente a solução trivial. Como consequência disso a solução $C(x, y, t)$ será simétrica sobre o eixo desejado e a condição (4.23) será atendida. Fazendo Q_{ext} ser simétrico, nós temos o problema no domínio estendido:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} = D \nabla^2 C - KC + Q_{ext}(x, y, t) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in (0, \infty) \quad (4.34)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0 \quad (4.35)$$

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0 \quad (4.36)$$

$$C(x, y, 0) = 0 \quad (4.37)$$

A solução do problema acima é idêntica ao problema dado na seção 4.1.1, só que nesse caso $U = 0$. É possível verificar que a solução do problema (4.34)-(4.37) no domínio original do problema atende à todas as condições da equação diferencial assim como às condições de contorno do problema original.

4.1.3 Evolução Temporal de uma Distribuição de Massa

Nesse caso o domínio apresenta uma concentração inicial dada pela função $C_0(x, y)$ e o problema visa achar uma função que descreva a evolução temporal dessa distribuição inicial no domínio dado. O problema é definido por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \nabla^2 C - KC \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad t \in (0, \infty) \quad (4.38)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0 \quad (4.39)$$

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0 \quad (4.40)$$

$$C(x, y, 0) = C_0(x, y) \quad (4.41)$$

Aplicando \mathcal{T} em (4.38):

$$s\Psi - \widehat{C}(\omega_1, \omega_2, 0) + i\omega_1 U\Psi + i\omega_2 V\Psi = D(-\omega_1^2 - \omega_2^2)\Psi - K\Psi \quad (4.42)$$

Aplicando a transformada dupla de Fourier em (4.41) e substituindo a mesma na expressão (4.42) nós obtemos:

$$\Psi = \frac{1}{(s + i\omega_1 U + i\omega_2 V + D\omega_1^2 + D\omega_2^2 + K)} \widehat{C}_0(\omega_1, \omega_2) \quad (4.43)$$

Basta agora aplicar a transformação \mathcal{T}^{-1} em (4.43). Começando pela transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\Psi\} = \widehat{C}_0(\omega_1, \omega_2) \exp[-At] \quad (4.44)$$

Onde $A = (Ui\omega_1 + Vi\omega_2 + D(\omega_2^2 + \omega_1^2) + K)$. A transformada inversa de Fourier em x e y é obtida por um processo análogo ao da seção 4.1.1. Com isso a solução é dada por:

$$C(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_0(\xi, \lambda) \frac{\exp\left[-Kt - \frac{(y-\lambda-Vt)^2}{4Dt} - \frac{(x-\xi-Ut)^2}{4Dt}\right]}{4D\pi t} d\lambda d\xi \quad (4.45)$$

4.1.4 Problema com Forçante e Condição Inicial não Homogênea

Nesse caso existe uma distribuição inicial de concentração dada pela função $C_0(x, y)$ e além disso existe uma carga externa entrando no domínio através da função $Q(x, y, t)$. O problema é definido como:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V\frac{\partial C}{\partial y} + U\frac{\partial C}{\partial x} = D\nabla^2 C - KC + Q(x, y, t) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in (0, \infty) \quad (4.46)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0 \quad (4.47)$$

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0 \quad (4.48)$$

$$C(x, y, 0) = C_0(x, y) \quad (4.49)$$

Primeiramente vamos definir o seguinte operador diferencial:

$$P = \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial y} + U \frac{\partial}{\partial x} - D \nabla^2 + K \quad (4.50)$$

Vamos supor que a solução seja do tipo:

$$C(x, y, t) = C1(x, y, t) + C2(x, y, t) \quad (4.51)$$

Onde $P\{C1\} = 0$ e $P\{C2\} = Q(x, y, t)$. Supondo que $C1$ e $C2$ satisfazem as condições (4.47) e (4.48), $C1(x, y, 0) = C_0(x, y)$ e $C2(x, y, 0) = 0$ é possível verificar que $C1 + C2$ é uma solução do problema proposto, sendo que $C1$ é solução do problema:

$$\frac{\partial C1}{\partial t} + V \frac{\partial C1}{\partial y} + U \frac{\partial C1}{\partial x} = D \nabla^2 C1 - K C1 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in (0, \infty) \quad (4.52)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} C1(x, y, t) = 0 \quad (4.53)$$

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} C1(x, y, t) = 0 \quad (4.54)$$

$$C1(x, y, 0) = C_0(x, y) \quad (4.55)$$

E $C2$ é solução do problema:

$$\frac{\partial C2}{\partial t} + V \frac{\partial C2}{\partial y} + U \frac{\partial C2}{\partial x} = D \nabla^2 C2 - K C2 + Q(x, y, t) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in (0, \infty) \quad (4.56)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} C2(x, y, t) = 0 \quad (4.57)$$

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} C_2(x, y, t) = 0 \quad (4.58)$$

$$C_2(x, y, 0) = 0 \quad (4.59)$$

Com isso a solução é dada por:

$$\begin{aligned} C(x, y, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_0(\xi, \lambda) \frac{\exp \left[-Kt - \frac{(y-\lambda-Vt)^2}{4Dt} - \frac{(x-\xi-Ut)^2}{4Dt} \right]}{4D\pi t} d\lambda d\xi + \\ & + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi, \lambda, \tau) \frac{\exp \left[-K(t-\tau) - \frac{(y-\lambda-V(t-\tau))^2}{4D(t-\tau)} - \frac{(x-\xi-U(t-\tau))^2}{4D(t-\tau)} \right]}{4D\pi(t-\tau)} d\lambda d\xi d\tau \end{aligned} \quad (4.60)$$

4.1.5 Evolução de uma Carga Conhecida na Fronteira

Nesse caso queremos analisar a evolução temporal da concentração de um escalar quando a sua concentração é conhecida em um eixo normal à praia. O problema é definido pela equação:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} = D \nabla^2 C - KC \quad (y, x) \in (0, \infty), 0 < t < \infty \quad (4.61)$$

Sujeito às condições:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0 \quad (4.62)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} C(x, y, t) = 0 \quad (4.63)$$

$$C(x, 0, t) = C_0(x, t) \quad (4.64)$$

$$C(x, y, 0) = 0 \quad (4.65)$$

Para resolver esse problema, vamos usar novamente uma transformada integral formada pela composta da transformada de Laplace e de Fourier e definir a transformação por:

$$\mathcal{T}\{f(x, t)\} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp[-st - i\omega x] f(x, t) dx dt = \bar{\bar{f}}(\omega, s) \quad (4.66)$$

Aplicando \mathcal{T} na expressão (4.61):

$$s\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{C}}(x, \omega, 0) + V \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial y} - D \frac{\partial^2 \bar{\bar{C}}}{\partial^2 y} + A\bar{\bar{C}} = 0 \quad (4.67)$$

Onde $A = \omega^2 D + K$. Devido a condição (4.65), a expressão acima pode ser escrita como a seguinte EDO:

$$\frac{\partial^2 \bar{\bar{C}}}{\partial^2 y} - \frac{V}{D} \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial y} - \frac{(s - A)}{D} \bar{\bar{C}} = 0 \quad (4.68)$$

Cuja solução geral é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{C}}(\omega, y, s) = & C1 \exp \left[\frac{V}{D} + \sqrt{\frac{V^2}{D^2} + \frac{4(s + A)}{D}} \right) \frac{y}{2} \Big] + \\ & + C2 \exp \left[\frac{V}{D} - \sqrt{\frac{V^2}{D^2} + \frac{4(s + A)}{D}} \right) \frac{y}{2} \Big] \end{aligned} \quad (4.69)$$

Aplicando \mathcal{T} nas condições (4.63) e (4.64) nós obtemos:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \bar{\bar{C}}(\omega, y, s) = 0 \quad (4.70)$$

$$\bar{\bar{C}}(\omega, 0, s) = \bar{\bar{C}}_0(\omega, s) \quad (4.71)$$

Por (4.70) e (4.71) a expressão (4.69) pode ser escrita como:

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{C}}_0(\omega, s) \exp \left[\frac{V}{D} - \sqrt{\frac{V^2}{D^2} + \frac{4(s + A)}{D}} \right) \frac{y}{2} \Big] \quad (4.72)$$

Depois de realizar manipulações algébricas, a equação (4.72) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{\bar{C}} = \exp \left[\frac{Vy}{2D} \right] \bar{\bar{C}}_0(\omega, s) \exp \left[\frac{-y}{\sqrt{D}} \sqrt{\left(\frac{V^2}{4D} + A + s \right)} \right] \quad (4.73)$$

Para se obter a solução do problema basta aplicar a transformada inversa de \mathcal{T} na expressão (4.73). Com isso nós temos:

$$C(x, y, t) = \mathcal{T}^{-1} \left\{ \exp \left[\frac{Vy}{2D} \right] \bar{\bar{C}}_0(\omega, s) \exp \left[\frac{-y}{\sqrt{D}} \sqrt{\left(\frac{V^2}{4D} + A + s \right)} \right] \right\} \quad (4.74)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace em (4.73), pelo teorema da convolução nós temos:

$$\hat{C}(\omega, y, t) = \exp \left[\frac{Vy}{2D} \right] \hat{C}_0(\omega, t) * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \exp \left[\frac{-y}{\sqrt{D}} \sqrt{\left(\frac{V^2}{4D} + A + s \right)} \right] \right\} \quad (4.75)$$

Sabendo que

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{l \exp \left[\frac{-l^2}{4t} \right]}{2\sqrt{\pi t^3}} \right\} = \exp -l\sqrt{s}$$

é possível usar o teorema da translação para achar a transformada inversa do lado direito da equação (4.75).

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \exp \left[\frac{-y}{\sqrt{D}} \sqrt{\left(\frac{V^2}{4D} + A + s \right)} \right] \right\} = \frac{y \exp \left[- \left(\frac{V^2}{4D} + A \right) t + \frac{-y^2}{4Dt} \right]}{2\sqrt{D\pi t^3}} \quad (4.76)$$

Substituindo (4.76) em (4.75):

$$\hat{C}(\omega, y, t) = \exp \left[\frac{Vy}{2D} \right] \int_0^t \hat{C}_0(\omega, \tau) \frac{y \exp \left[- \left(\frac{V^2}{4D} + A \right) (t - \tau) + \frac{-y^2}{4D(t-\tau)} \right]}{2\sqrt{D\pi(t-\tau)^3}} d\tau \quad (4.77)$$

Basta agora achar a transformada inversa de Fourier da expressão acima para se obter a solução desejada. Pelas propriedades da transformada inversa de Fourier e pelo teorema de Fubini, obtemos a seguinte igualdade:

$$C(x, y, t) = \exp \left[\frac{Vy}{2D} \right] \int_0^t \mathcal{C}_t^{-1} \left\{ \hat{F}(\omega, t) \frac{y \exp \left[- \left(\frac{V^2}{4D} + A \right) (t - \tau) + \frac{-y^2}{4D(t-\tau)} \right]}{2\sqrt{D\pi(t-\tau)^3}} \right\} d\tau \quad (4.78)$$

Para simplificação, chamaremos o argumento da transformada inversa em (4.78) de Φ . Usando o teorema da convolução de Fourier:

$$\mathcal{F}^{-1}(\Phi) = C_0(x, t) * \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{y \exp \left[- \left(\frac{V^2}{4D} + A \right) (t - \tau) + \frac{-y^2}{4D(t-\tau)} \right] }{2\sqrt{D\pi}(t-\tau)^3} \right\} \quad (4.79)$$

Com isso nós temos:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{y \exp \left[- \left(\frac{V^2}{4D} + A \right) (t - \tau) + \frac{-y^2}{4D(t-\tau)} \right] }{2\sqrt{D\pi}(t-\tau)^3} \right\} = \\ & = \frac{y \exp \left[- \left(\frac{V^2}{4D} \right) (t - \tau) + \frac{-y^2}{4D(t-\tau)} \right]}{2\sqrt{D\pi}(t-\tau)^3} \mathcal{F}^{-1} \{ \exp -A(t-\tau) \} \end{aligned} \quad (4.80)$$

Substituindo o valor de A em (4.80):

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \exp [-A(t-\tau)] \} = \mathcal{F}^{-1} \{ \exp [-(\omega^2 D + k)(t-\tau)] \} \quad (4.81)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \exp [-(\omega^2 D + k)(t-\tau)] \} = \exp [-k(t-\tau)] \mathcal{F}^{-1} \{ \exp [-\omega^2 D] \} \quad (4.82)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \exp [-(\omega^2 D)(t-\tau)] \} = \frac{\exp \left[\frac{-x^2}{4(t-\tau)D} \right]}{2\sqrt{(t-\tau)D\pi}} \quad (4.83)$$

Substituindo as equações (4.79)-(4.83) em (4.78) nós obtemos a solução do problema:

$$\begin{aligned} C(x, y, t) &= \exp \left[\frac{Vy}{2D} \right] \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} C_0(\xi, \tau) \times \\ &\times \frac{y \exp \left[- \left(\frac{V^2}{4D} \right) (t - \tau) + \frac{-y^2}{4D(t-\tau)} + \frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)D} - K(t-\tau) \right]}{4D\pi(t-\tau)^2} d\xi d\tau \end{aligned} \quad (4.84)$$

4.2 Exemplos

Nesta seção serão apresentados alguns exemplos de casos particulares das soluções mostradas na seção anterior. Todos os gráficos presentes nessa seção nos fornecem a concentração C de alguma substância em função do espaço em um dado tempo.

4.2.1 Forçante Constante

Primeiramente vamos estudar a solução do problema da seção 4.1.1 quando $Q(x, y, t) = Q_0$. Ou seja, existe uma carga de poluição entrando igualmente em todos os pontos do domínio. Devido as características do problema é de se esperar que a dependência espacial da solução de alguma forma desapareça da solução final. Substituindo $Q(x, y, t)$ em (4.18) nós temos:

$$C(x, y, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_0 \frac{\exp \left[-K(t - \tau) - \frac{(y - \lambda - V(t - \tau))^2}{4D(t - \tau)} - \frac{(x - \xi - U(t - \tau))^2}{4D(t - \tau)} \right]}{4D\pi(t - \tau)} d\lambda d\xi d\tau \quad (4.85)$$

A expressão acima pode ser reescrita como:

$$C(x, y, t) = \frac{Q_0}{4D\pi} \int_0^t \exp [-K(t - \tau)] \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[-\frac{(y - \lambda - V(t - \tau))^2}{4D(t - \tau)} \right]}{(t - \tau)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[-\frac{(x - \xi - U(t - \tau))^2}{4D(t - \tau)} \right]}{(t - \tau)} d\xi d\lambda d\tau \quad (4.86)$$

As integrais da expressão (4.86) podem ser calculadas separadamente. Vamos resolver primeiro a integral em ξ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x - \xi - U(t - \tau))^2}{4d(t - \tau)} \right] d\xi \quad (4.87)$$

Chamando $u = \frac{y - \lambda - V(t - \tau)}{2\sqrt{D(t - \tau)}}$ nós obtemos a igualdade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x - \xi - U(t - \tau))^2}{4d(t - \tau)} \right] d\xi = 2\sqrt{D(t - \tau)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-u^2] du \quad (4.88)$$

Com isso nós temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x - \xi - U(t - \tau))^2}{4d(t - \tau)} \right] d\xi = 2\sqrt{D(t - \tau)\pi} \quad (4.89)$$

A integral em λ é resolvida pelo mesmo método. Com isso a expressão (4.85) pode ser escrita como:

$$C(x, y, t) = Q_0 \int_0^t \exp[-K(t - \tau)] d\tau \quad (4.90)$$

Cuja solução é:

$$C(x, y, t) = \frac{Q_0(1 - \exp[-Kt])}{K} \quad (4.91)$$

Vale salientar que a função $Q(x, y, t) = Q_0$ não é integrável no plano e como consequência a transformada dupla de Fourier não existe para essa função, apesar disso a solução dada por (4.91) é realmente a solução do problema. É possível verificar também que (4.91) é solução da seguinte EDO:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -KC + Q_0 \quad (4.92)$$

Sujeito à condição:

$$C(t = 0) = 0 \quad (4.93)$$

4.2.2 Forçante como uma Carga Concentrada em um Ponto

Vamos analisar a solução do problema dado na seção 4.1.1 em um cenário sem decaimento de primeira ordem e sem advecção. Nós vamos considerar também que $Q(x, y, t) = \delta(x, y)$. Nesse caso a solução simula um problema puramente difusivo quando a fonte de poluição está entrando continuamente concentrada em somente um ponto do domínio. Com todas essas considerações a expressão (4.18) pode ser escrita como:

$$C(x, y, t) = \int_0^t \frac{\exp\left[-\frac{y^2}{4D(t-\tau)} - \frac{x^2}{4D(t-\tau)}\right]}{4D\pi(t-\tau)} d\tau \quad (4.94)$$

Fazendo uma mudança de variável do tipo:

$$\xi = \frac{4Dt}{4Dt - \tau}$$

Com a mudança de variável dada acima a expressão (4.94) pode ser escrita como:

$$C(x, y, t) = \frac{E_1 \left[\frac{x^2 + y^2}{4Dt} \right]}{4D} \quad (4.95)$$

Onde a função E_1 é denominada Função E_n com $n = 1$ e é definida como [1]:

$$E_1(x) = \int_1^\infty \frac{\exp(-x\xi)}{\xi} d\xi \quad (4.96)$$

4.2.3 Entrada Abrupta de um Poluente no Sistema

Vamos analisar o problema proposto na seção 4.1.1 quando $Q(x, y, t) = \delta(x, y, t)$. Essa solução simula uma entrada abrupta de poluição concentrada em um ponto do domínio. Substituindo Q na equação (4.18) nós temos:

$$C(x, y, t) = \frac{\exp \left[-Kt - \frac{(y-Vt)^2}{4Dt} \right]}{2\sqrt{D\pi t}} \frac{\exp \left[\frac{-(x-Ut)^2}{4Dt} \right]}{2\sqrt{D\pi t}} \quad (4.97)$$

4.2.4 Forçante como uma Distribuição Gaussiana Padrão

Vamos analisar o comportamento da solução em um cenário sem decaimento de primeira ordem e sem advecção e considerando $Q(x, y, t) = \exp(-(x^2 + y^2))$. Nesse caso a solução simula um problema difusivo quando existe uma entrada de poluição no domínio em forma de uma distribuição gaussiana centrada na origem. Desconsiderando as velocidades do fluido e também o seu decaimento natural e substituindo Q em (4.18) nós temos:

$$C(x, y, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp(-(\lambda^2 + \xi^2)) \frac{\exp \left[-\frac{(y-\lambda)^2}{4D(t-\tau)} - \frac{(x-\xi)^2}{4D(t-\tau)} \right]}{4D\pi(t-\tau)} d\lambda d\xi d\tau \quad (4.98)$$

A expressão acima pode ser escrita como:

$$C(x, y, t) = \int_0^t \frac{1}{4D\pi(t-\tau)} \times \int_{-\infty}^\infty \exp \left[-\frac{(y-\lambda)^2}{4D(t-\tau)} - \lambda^2 \right] d\lambda \int_{-\infty}^\infty \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-\tau)} - \xi^2 \right] d\xi d\tau \quad (4.99)$$

Vamos resolver a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(y - \lambda)^2}{4D(t - \tau)} - \lambda^2 \right] d\lambda. \quad (4.100)$$

O argumento da exponencial em (4.100) pode ser escrito como

$$\frac{-y^2 - 2y\lambda + \lambda^2}{4D(t - \tau)} - \lambda^2; \quad (4.101)$$

com isso a integral (4.100) pode ser reescrita como:

$$\exp \left[\frac{-y^2}{4D(t - \tau)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{2x\lambda - \lambda^2}{4d(t - \tau)} - \lambda^2 \right] d\lambda \quad (4.102)$$

O argumento da exponencial dentro da integral em (4.102) pode ser escrito como:

$$\frac{\lambda x}{2D(t - \tau)} - \frac{\lambda^2}{4D(t - \tau)} - \lambda^2 \quad (4.103)$$

A expressão (4.103) depois de sofrer manipulações algébricas pode ser escrita como:

$$\left(\frac{-1}{4D(t - \tau)} - 1 \right) \left(\lambda - \frac{x}{1 + 4D(t - \tau)} \right)^2 - \frac{x^2}{-16D^2(t - \tau)^2 - 4D(t - \tau)} \quad (4.104)$$

Substituindo (4.104) em (4.102) nós temos:

$$\exp \left[\frac{-y^2}{1 + 4D(t - \tau)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\left(\frac{-1}{4D(t - \tau)} - 1 \right) \left(\lambda - \frac{y}{1 + 4D(t - \tau)} \right)^2 \right] d\lambda \quad (4.105)$$

Na expressão acima é possível fazer a seguinte mudança de variável:

$$u = \left(\frac{1}{4D(t - \tau)} + 1 \right) \left(\lambda - \frac{y}{1 + 4D(t - \tau)} \right)^2 \quad (4.106)$$

Por (4.106) nós obtemos:

$$d\lambda = \frac{2\sqrt{D(t - \tau)}du}{\sqrt{1 + 4D(t - \tau)}} \quad (4.107)$$

Com isso (4.105) pode ser escrita como:

$$\exp \left[\frac{-y^2}{1 + 4D(t - \tau)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) \frac{2\sqrt{D(t - \tau)} du}{\sqrt{1 + 4D(t - \tau)}} \quad (4.108)$$

Com isso a integral em (4.100) é dada por:

$$\exp \left[\frac{-y^2}{1 + 4D(t - \tau)} \right] \frac{2\sqrt{D(t - \tau)}}{\sqrt{1 + 4D(t - \tau)}} \sqrt{\pi} \quad (4.109)$$

Para resolver a integral em ξ na expressão (4.99) usa-se um processo análogo ao realizado anteriormente em λ . Com as integrais calculadas, a expressão (4.99) pode ser escrita como:

$$C(x, y, t) = \int_0^t \frac{\exp \left[-\frac{y^2}{1 + 4D(t - \tau)} - \frac{x^2}{1 + 4D(t - \tau)} \right]}{1 + 4D(t - \tau)} d\tau \quad (4.110)$$

A integral acima tem solução analítica que é dada por:

$$C(x, y, t) = \frac{-1}{4D} \left(-E_1 \left(\frac{x^2 + y^2}{1 + 4Dt} \right) + E_1(x^2 + y^2) \right) \quad (4.111)$$

A função E_1 é definida na expressão (4.96). As figuras 4.1 - 4.3 mostram o comportamento da solução para diferentes instantes de tempo com $D = 0,0135 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $U = 0$, $V = 0$ e $K = 0$.

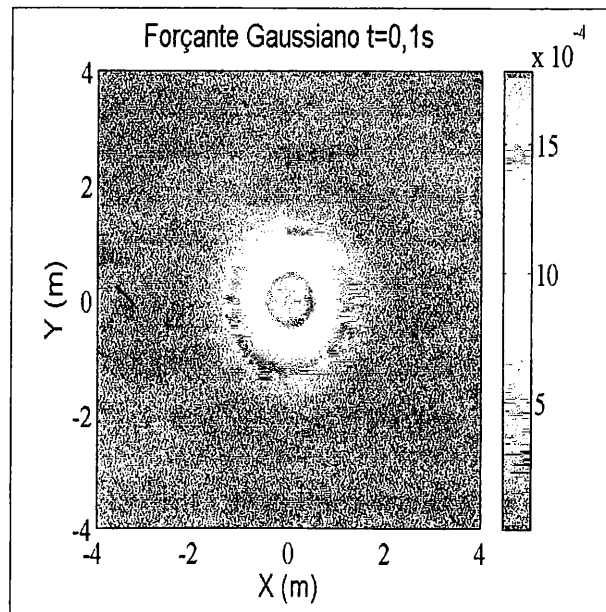


Figura 4.1: Forçante Gaussiano $t=0,1s$

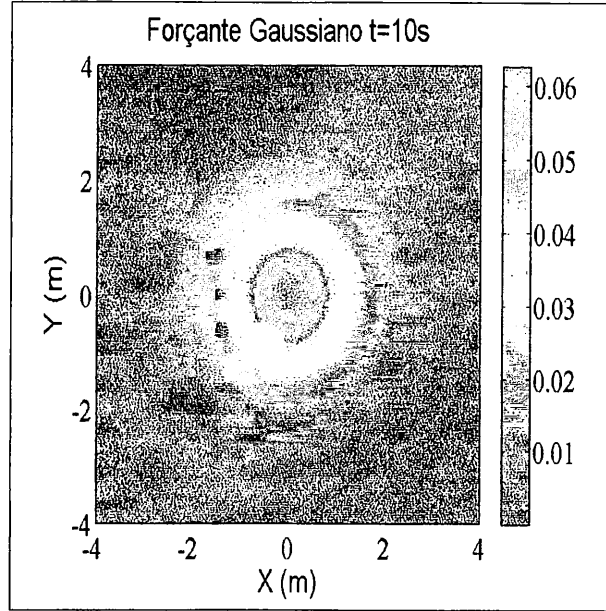


Figura 4.2: Forçante Gaussiano $t=10s$

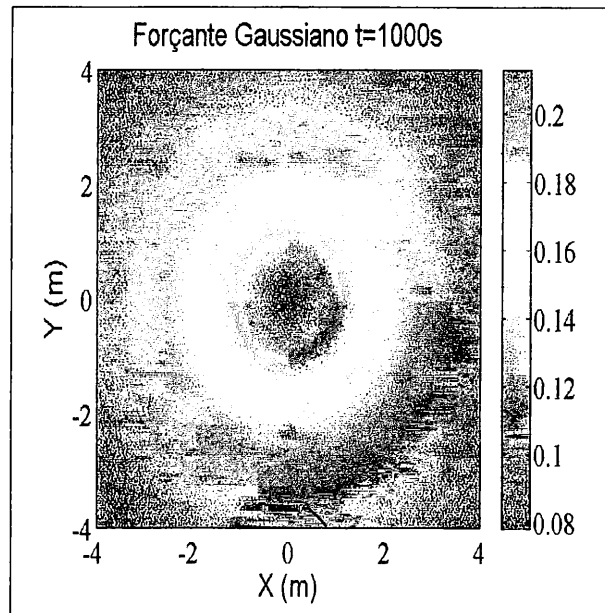


Figura 4.3: Forçante Gaussiano $t=1000s$

4.2.5 Condição Inicial Como um Pulso Bidimensional

Vamos analisar o comportamento de um problema somente com condição inicial e sem forçante. Nesse caso a solução simula a evolução da concentração de alguma substância quando ela está inicialmente disposta como um pulso bidimensional. Fazendo $C_0(x, y) = H(x + 1, y + 1) - H(x - 1, y - 1)$ e $Q(x, y, t) = 0$, onde $H(x, y)$ é a função de Heaviside

bidimensional, em (4.60) nós temos:

$$C(x, y, t) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\exp \left[-Kt - \frac{(y-\lambda-Vt)^2}{4Dt} - \frac{(x-\xi-Ut)^2}{4Dt} \right]}{4D\pi t} d\lambda d\xi \quad (4.112)$$

A integral da expressão (4.112) pode ser calculada separando as integrais em λ e ξ . Considerando por exemplo a integral em λ ,

$$\int_{-1}^1 \frac{\exp \left[- \left(\frac{(y-\lambda-Vt)}{2\sqrt{Dt}} \right)^2 \right]}{2\sqrt{D\pi t}} d\lambda,$$

e fazendo uma mudança de variável do tipo:

$$u = \frac{(y - \lambda - Vt)}{2\sqrt{Dt}}$$

Substituindo u na integral em λ nós temos:

$$\int_{-1}^1 \frac{\exp \left[- \left(\frac{(y-\lambda-Vt)}{2\sqrt{Dt}} \right)^2 \right]}{2\sqrt{D\pi t}} d\lambda = \int_a^b \exp(-u^2) du$$

Onde

$$a = \frac{(y - 1 - Vt)}{2\sqrt{Dt}}$$

$$b = \frac{(y + 1 - Vt)}{2\sqrt{Dt}} \quad \setminus$$

Realizando processos análogos para a integral em ξ a solução do problema pode ser escrita como:

$$C(x, y, t) = \frac{\exp[-Kt]}{4} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1 - y + Vt}{2\sqrt{Dt}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-1 - y + Vt}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) \times \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1 - x + Ut}{2\sqrt{Dt}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-1 - x + Ut}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) \quad (4.113)$$

As figuras 4.4 - 4.7 ilustram o comportamento da função (4.113) com $V = 0,1 \text{ ms}^{-1}$, $U = 0,1 \text{ ms}^{-1}$, $D = 0,00135 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e $K = 0,01 \text{ d}^{-1}$.

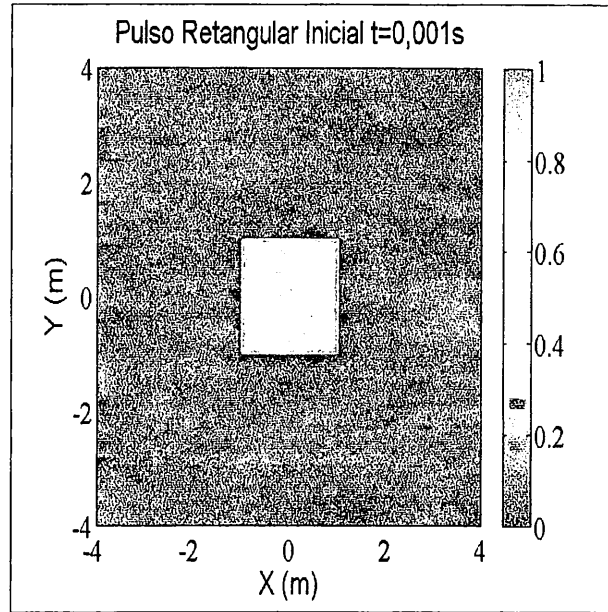


Figura 4.4: Condição Inicial Como uma Heaviside $t=0,001\text{s}$

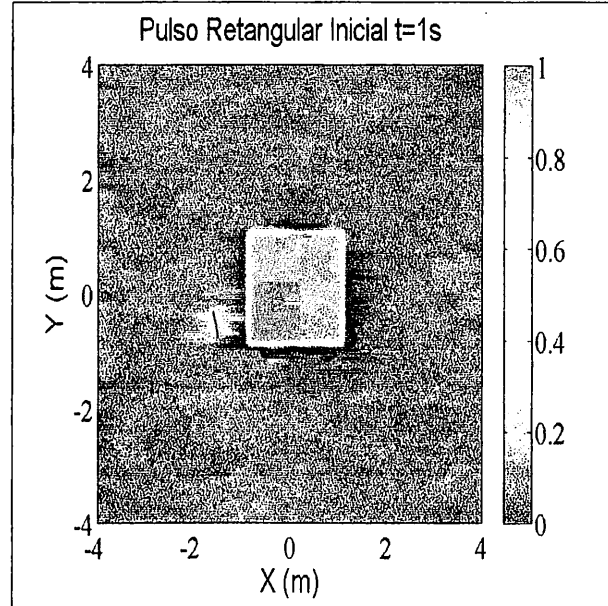


Figura 4.5: Condição Inicial Como uma Heaviside $t=1\text{s}$

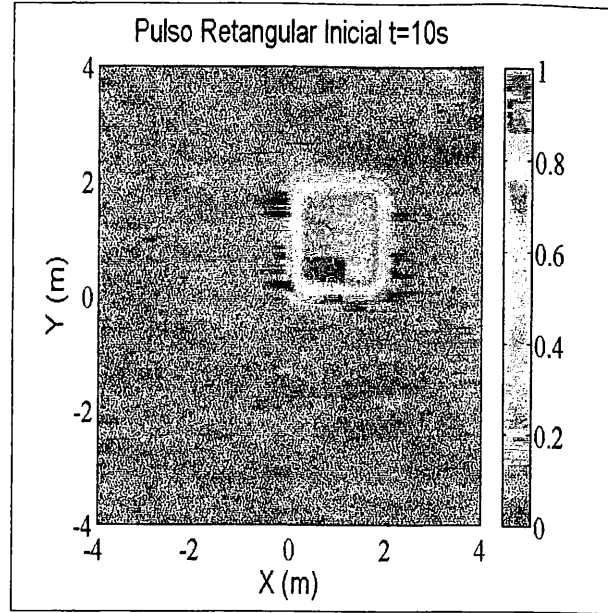


Figura 4.6: Condição Inicial Como uma Heaviside $t=10s$

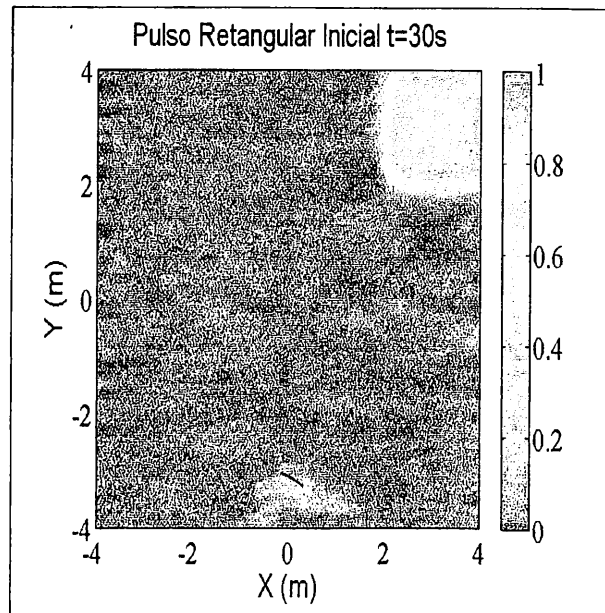


Figura 4.7: Condição Inicial Como uma Heaviside $t=30s$

4.2.6 Condição Inicial Como um Pulso Bidimensional e Forçante Gaussiano

Vamos analisar agora um problema difusivo onde existe a presença de um forçante e uma condição inicial não homogênea. Fazendo $C_0 = H(x + 1, y + 1) - H(x - 1, y - 1)$ e $Q = \exp(-(x^2 + y^2))$ em (4.60), onde $H(x, y)$ é a função de Heaviside bidimensional, nós

temos:

$$C(x, y, t) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\exp \left[-Kt - \frac{(y-\lambda-Vt)^2}{4Dt} - \frac{(x-\xi-Ut)^2}{4Dt} \right]}{4D\pi t} d\lambda d\xi + \quad (4.114)$$

$$+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x^2 + y^2)) \frac{\exp \left[-K(t-\tau) - \frac{(y-\lambda-V(t-\tau))^2}{4D(t-\tau)} - \frac{(x-\xi-U(t-\tau))^2}{4D(t-\tau)} \right]}{4D\pi(t-\tau)} d\lambda d\xi d\tau$$

As figuras 4.8 - 4.10 mostram o comportamento da função (4.114) com $V = 0 \text{ ms}^{-1}$, $U = 0 \text{ ms}^{-1}$, $D = 0,00135 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e $K = 0 \text{ d}^{-1}$.

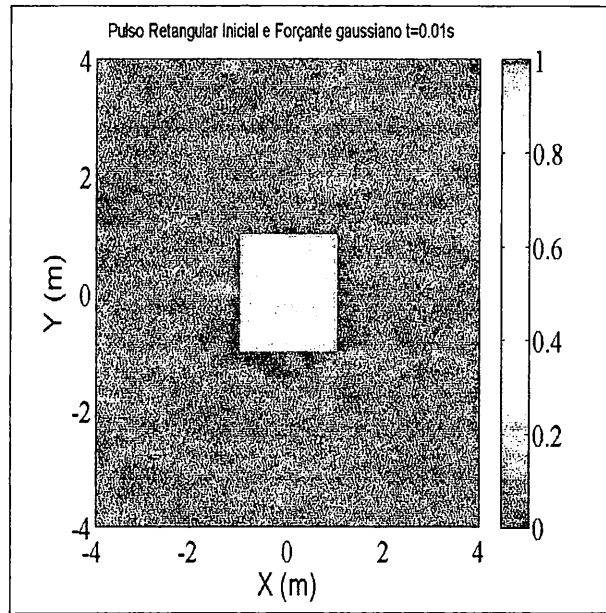


Figura 4.8: Condição Inicial Como uma Heaviside e Forçante Gaussiano $t=0,01\text{s}$

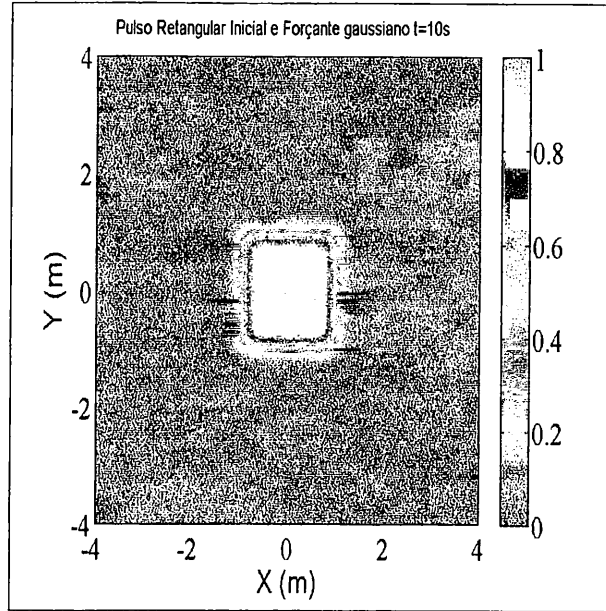


Figura 4.9: Condição Inicial Como uma Heaviside e Forçante Gaussiano $t=10s$

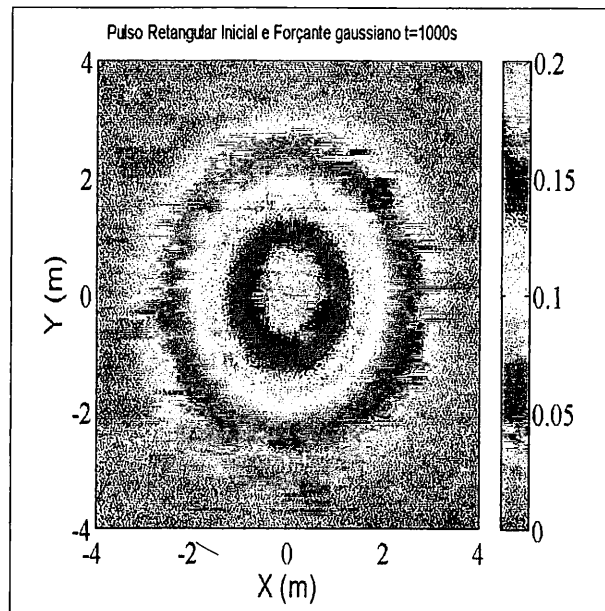


Figura 4.10: Condição Inicial Como uma Heaviside e Forçante Gaussiano $t=1000s$

4.2.7 Forçante Constante na Fronteira

Vamos analisar o comportamento da solução do problema definido pelas equações (4.61)-(4.65) quando $C_0(x, t) = C_0$, onde C_0 é constante. Nesse caso como em todo o eixo $y = 0$ a concentração é constante, é razoável supor de antemão que a dependência em x da solução de alguma forma tem que desaparecer no desenrolar dos cálculos. Substituindo

$C_0(x, t)$ em (4.84) nós temos:

$$C(x, y, t) = \exp \left[\frac{Vy}{2D} \right] \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} C_0 \times \frac{y \exp \left[- \left(\frac{V^2}{4D} \right) (t - \tau) + \frac{-y^2}{4D(t-\tau)} + \frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)D} - K(t - \tau) \right]}{4D\pi(t - \tau)^2} d\xi d\tau \quad (4.115)$$

Supondo que a função sobre a ordem de integração respeita as condições do teorema de Fubini, então (4.115) pode ser escrita como:

$$C(x, y, t) = \exp \left[\frac{Vy}{2D} \right] \int_0^t C_0 \frac{y \exp \left[- \left(\frac{V^2}{4D} \right) (t - \tau) + \frac{-y^2}{4D(t-\tau)} - K(t - \tau) \right]}{4D\pi(t - \tau)^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[\frac{-(x - \xi)^2}{4(t - \tau)D} \right] d\xi d\tau \quad (4.116)$$

A integral em ξ já foi calculada em (4.87) com $U = 0$ e seu resultado é $2\sqrt{D(t - \tau)}\pi$. Com isso a expressão (4.116) pode ser escrita como:

$$C(x, y, t) = \exp \left[\frac{Vy}{2D} \right] \int_0^t C_0 \frac{y \exp \left[- \left(\frac{V^2}{4D} \right) (t - \tau) + \frac{-y^2}{4D(t-\tau)} - K(t - \tau) \right]}{4D\pi(t - \tau)^2} \times 2\sqrt{D(t - \tau)}\pi d\tau \quad (4.117)$$

A expressão acima pode ser escrita como:

$$C(x, y, t) = yC_0 \exp \left[\frac{Vy}{2D} \right] \int_0^t \frac{\exp \left[- \left(\frac{V^2}{4D} \right) (t - \tau) + \frac{-y^2}{4D(t-\tau)} - K(t - \tau) \right]}{2\sqrt{D\pi}(t - \tau)^3} d\tau \quad (4.118)$$

A integral acima tem solução analítica que é dada pela expressão:

$$C(x, y, t) = \frac{C_0}{2} \left[\exp \left[\frac{Vy}{2D}(1 + \sqrt{1 + 2H}) \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{y + Vt\sqrt{1 + 2H}}{2\sqrt{Dt}} \right] + \exp \left[\frac{Vy}{2D}(1 - \sqrt{1 + 2H}) \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{y - Vt\sqrt{1 + 2H}}{2\sqrt{Dt}} \right] \right] \quad (4.119)$$

Onde $H = \frac{2KD}{V^2}$. A expressão acima é idêntica à solução do problema de advecção e difusão com decaimento unidimensional com fronteira constante: esse problema foi apresentado e resolvido em [15]. A figura 4.11 mostra o comportamento da concentração

em uma seção paralela ao eixo y em diferentes instantes de tempo, com $V = 0,1 \text{ ms}^{-1}$, $D = 0,00135 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $K = 0,0003 \text{ d}^{-1}$ e $C_0 = 10 \text{ M(V)}^{-1}$.

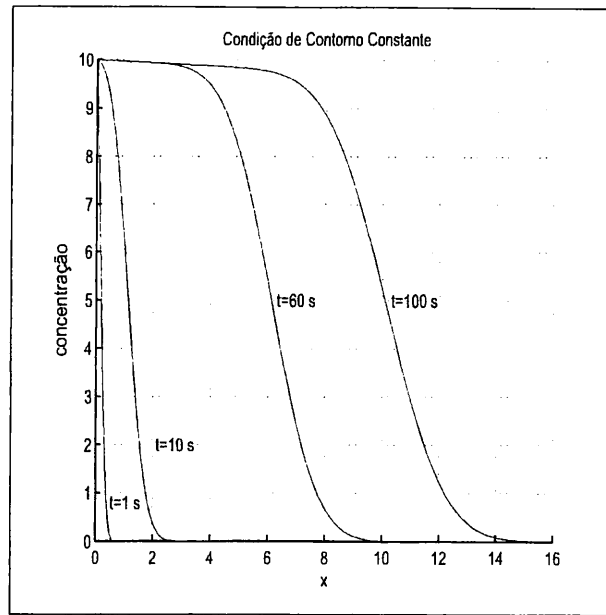


Figura 4.11: Perfis da Solução Para Uma Reta Qualquer em y

4.2.8 Regime Permanente do Problema Semi Infinito com Concentração Conhecida na Fronteira

Os problemas difusivos normalmente entram em um estado de equilíbrio estacionário (regime permanente). Nesta seção nós resolveremos um problema que fornece o perfil do estado estacionário do problema definido pelas equações (4.61)-(4.65) quando $C_0(x, t) = C_0$ onde C_0 é constante. No estado estacionário nós temos que $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$, com isso o problema permanente fica definido por:

$$V \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - KC \quad (0 < y < \infty) \quad (4.120)$$

Sujeito às condições:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} C(y) = 0 \quad (4.121)$$

$$C(0) = C_0 \quad (4.122)$$

A equação (4.120) é uma EDO linear de segunda ordem e tem como equação característica a seguinte expressão:

$$m^2 - \frac{V}{D}m - \frac{K}{D} = 0$$

Com isso a solução geral de (4.120) é dada por:

$$C(y) = A \exp \left[\frac{Vy}{D} + \sqrt{\frac{V^2}{D^2} + \frac{4K}{D}} y \right] + B \exp \left[\frac{Vy}{D} - \sqrt{\frac{V^2}{D^2} + \frac{4K}{D}} y \right]$$

Onde A e B são constantes arbitrárias. Pelas condições (4.121) e (4.122) nós temos que $A = 0$ e $B = C_0$. Com isso a solução do problema é dada por:

$$C(y) = C_0 \exp \left[\frac{Vy}{D} - \sqrt{\frac{V^2}{D^2} + \frac{4K}{D}} y \right] \quad (4.123)$$

4.2.9 Regime Permanente de um Problema de Difusão Bidimensional

Vamos analisar o regime permanente do problema definido pelas equações (4.61)-(4.65) quando $C_0(x, t) = H(x - 5) - H(x - 10)$, $V = 0$ e $K = 0$. Essas imposições nos dão um problema puramente difusivo. Com isso a equação diferencial do problema é dada por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C \quad (4.124)$$

Como desejamos verificar o estado do problema estacionário nós temos que $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$ e com isso (4.124) fica:

$$D \nabla^2 C = 0$$

Então o estado estacionário é dado formalmente pelo problema:

$$\nabla^2 C = 0 \quad (-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty) \quad (4.125)$$

Sujeito às condições:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} C(x, y) = 0 \quad (4.126)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} C(x, y) = 0 \quad (4.127)$$

$$C(x, 0) = H(x - 5) - H(x - 10) \quad (4.128)$$

Vamos buscar uma solução para o problema acima analisando a solução do problema transiente. A solução do problema transiente é dada por:

$$C(x, y, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, t - \tau) \frac{y \exp \left[\frac{-y^2}{4D(\tau)} + \frac{-(x-\xi)^2}{4(\tau)D} \right]}{4D\pi(\tau)^2} d\xi d\tau \quad (4.129)$$

Onde $F(\xi, t - \tau) = H(\xi - 5) - H(\xi - 10)$. A expressão acima pode ser escrita como:

$$C(x, y, t) = \int_0^t \frac{y \exp \left[\frac{-y^2}{4D(\tau)} \right]}{4D\pi(\tau)^2} \int_5^{10} \exp \left[\frac{-(x - \xi)^2}{4(t - \tau)D} \right] d\xi d\tau \quad (4.130)$$

Calculando a integral em ξ nós temos:

$$C(x, y, t) = \int_0^t \frac{y \exp \left[\frac{-y^2}{4D(\tau)} \right]}{4\sqrt{D}\pi(\tau)^3} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{-5 + x}{2\sqrt{D}\tau} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-10 + x}{2\sqrt{D}\tau} \right) \right) d\tau \quad (4.131)$$

O estado permanente se dá quando o tempo tende ao infinito. Com isso nós temos:

$$C(x, y) = \int_0^\infty \frac{y \exp \left[\frac{-y^2}{4D(\tau)} \right]}{4\sqrt{D}\pi(\tau)^3} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{-5 + x}{2\sqrt{D}\tau} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-10 + x}{2\sqrt{D}\tau} \right) \right) d\tau \quad (4.132)$$

Calculando a integral acima nós temos a solução do problema (4.125) sujeito as condições (4.126)-(4.128):

$$C(x, y) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan \left(\frac{5 - x}{y} \right) - \arctan \left(\frac{10 - x}{y} \right) \right) \quad (4.133)$$

A solução acima pode ser achada diretamente usando transformada de Fourier em (4.125) que leva a seguinte integral:

$$C(x, y) = \frac{x}{\pi} \int_5^{10} \frac{1}{(y - \xi)^2 + x^2} d\xi \quad (4.134)$$

Capítulo 5

Soluções Numéricas

Nesse capítulo serão apresentados as simulações feitas através do modelo numérico. Serão apresentadas também comparações entre as soluções numéricas e expressões construídas através de soluções analíticas. A seção 5.1 trata da validação das soluções numéricas utilizadas nesse trabalho. A seção 5.2 descreve as entradas utilizadas na solução numérica com a finalidade de simular o transporte de organismos patogênicos na zona de estudo. A seção 5.3 apresenta os resultados das simulações realizadas com o modelo numérico. A seção 5.4 apresenta o perfil do regime permanente da concentração bacteriana ao longo da costa e apresenta também uma comparação entre uma solução analítica calibrada e o perfil de concentração bacteriana calculado pelo modelo numérico.

5.1 Validação do Modelo Numérico

Para se validar o modelo numérico fez-se uso de algumas soluções analíticas a fim de comparar a precisão das aproximações numéricas em relação às soluções exatas dos problemas.

Nos dois exemplos mostrados a seguir a malha de diferenças finitas foi construída com 511×255 pontos e espaçamento $\Delta x = \Delta y = 0,05$ m. O domínio dado por essa malha de diferenças finitas é um retângulo com 25,55 m de comprimento e 12,8 m de largura. O tempo foi discretização usando $\Delta t = 0,01$ s

5.1.1 Condição Inicial Como uma Distribuição Gaussiana

Vamos analisar o problema proposto na seção 4.1.3 quando $C_0 = \exp(-x^2 - y^2)$. Esse exemplo simula a evolução de uma distribuição gaussiana de concentração em um domínio sujeito à difusão, advecção e decaimento. Nesse exemplo a origem dos eixos é colocada bem no meio do retângulo que representa o domínio em (3.58). A solução analítica do problema é dada por:

$$C(x, y, t) = \frac{\exp\left(\frac{-(x-ut)^2 - (y-vt)^2}{1+4Dt}\right)}{1+4Dt} \quad (5.1)$$

As figuras 5.1 - 5.3 comparam os valores da solução numérica e analítica em uma seção paralela a costa quando $y = 0$, $U = 0 \text{ ms}^{-1}$, $V = 0,01 \text{ ms}^{-1}$, $K = 0 \text{ d}^{-1}$ e $D = 0,0135 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, para diferentes valores de tempo.

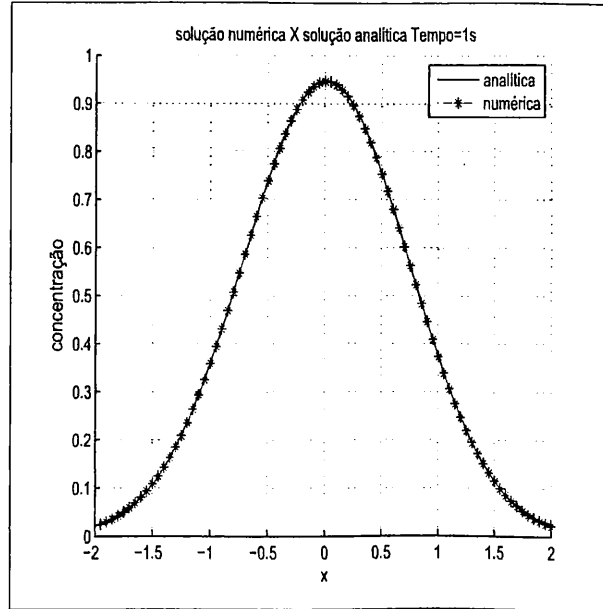


Figura 5.1: Solução Numérica × Solução Analítica $t=1s$

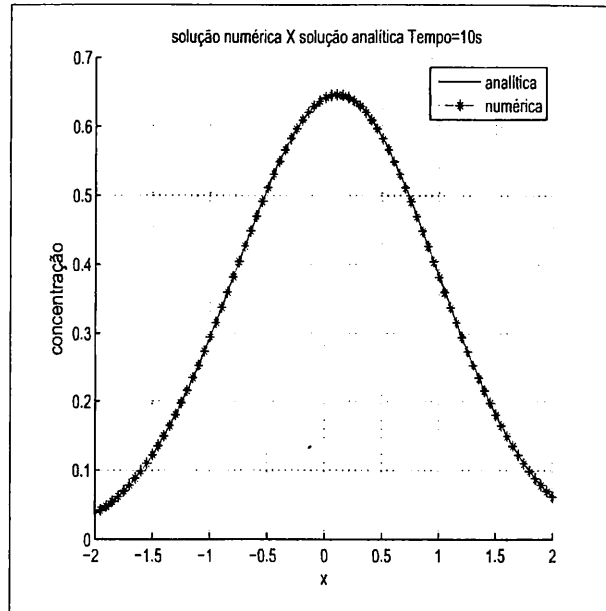


Figura 5.2: Solução Numérica \times Solução Analítica $t=10s$

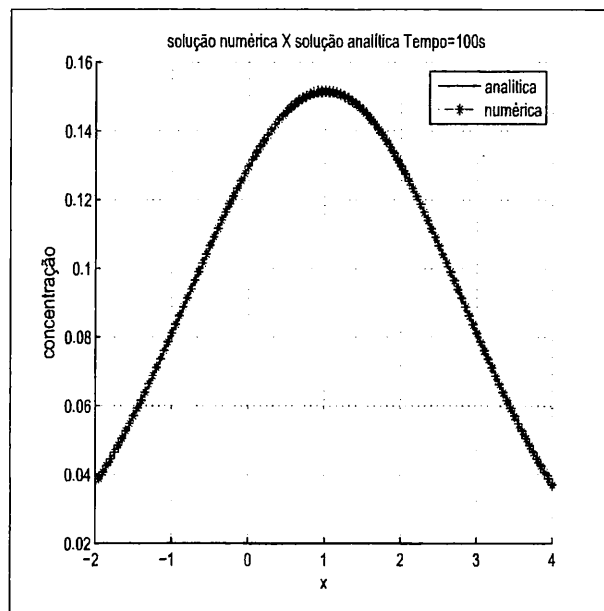


Figura 5.3: Solução Numérica \times Solução Analítica $t=100s$

A tabela 5.1 apresenta o valor do erro máximo entre a solução numérica e analítica, com os coeficientes descritos acima, para diferentes instantes de tempo.

Tabela 5.1: Erro Máximo da Solução Numérica para
Condição Inicial como uma Distribuição Gaussiana

Tempo s	Erro Max
1	0,0022
5	0,0014
10	0,0009206
20	0,0004558
40	0,000159
80	0,0004378
100	0,0014

5.1.2 Condição de Contorno Constante

Nesse caso nós queremos comparar as soluções numéricas e analíticas do problema proposto na seção 4.2.7 . A solução do problema é dada pela função:

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[\exp \left[\frac{Ux}{2D} (1 + \sqrt{1 + 2H}) \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{x + Ut\sqrt{1 + 2H}}{2\sqrt{Dt}} \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[\frac{Ux}{2D} (1 - \sqrt{1 + 2H}) \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{x - Ut\sqrt{1 + 2H}}{2\sqrt{Dt}} \right] \right] \quad (5.2)$$

Com $H = \frac{2KD}{U^2}$. As figuras 5.4 - 5.8 mostram a comparação entre a solução numérica e analítica em uma seção paralela à costa com $U = 0,1 \text{ ms}^{-1}$, $D = 0,0135 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $K = 0,0003 \text{ d}^{-1}$ e $C_0 = 10\text{M(V)}^{-1}$.

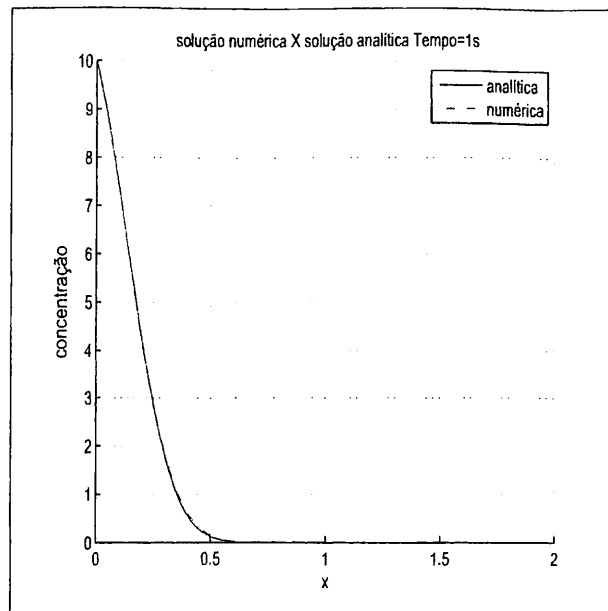


Figura 5.4: Solução Numérica \times Solução Analítica $t=1s$

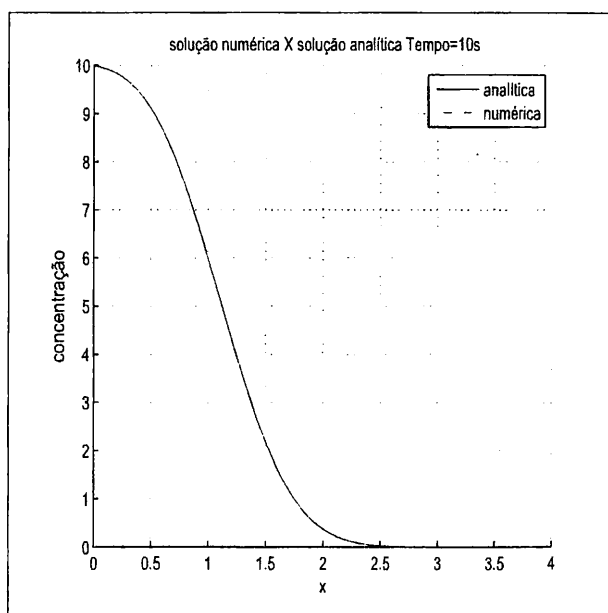


Figura 5.5: Solução Numérica \times Solução Analítica $t=10s$

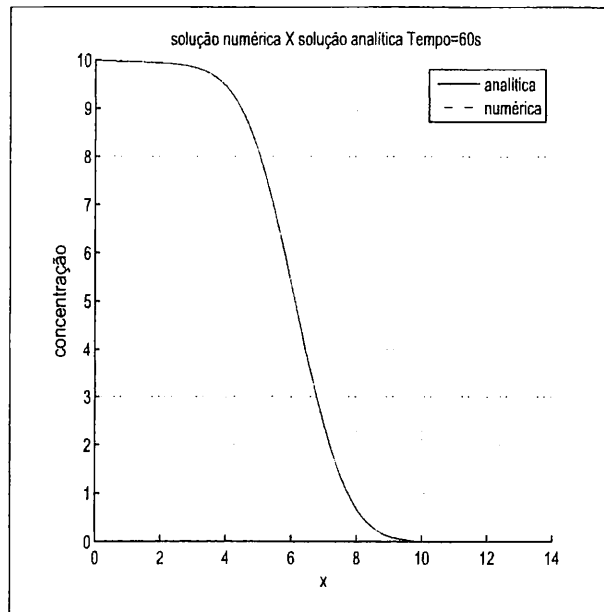


Figura 5.6: Solução Numérica × Solução Analítica $t=20s$

A tabela 5.2 apresenta o valor do erro máximo entre a solução numérica e analítica, com os coeficientes descritos acima, para diferentes instantes de tempo.

Tabela 5.2: Erro Máximo da Solução Numérica para uma Condição de Contorno Constante

Tempo s	Erro Max
1	0,0394
5	0,009
10	0,0060
20	0,0051
30	0,0047
40	0,0049
50	0,0053
60	0,0056

É possível observar que a solução numérica está representando bem a solução analítica nas regiões onde o contorno não está influenciando a solução. Com esses dois exemplos é possível afirmar que a solução numérica está se comportando como o esperado e ela já pode ser usada para modelar casos mais complexos.

5.2 Modelo de Decaimento Bacteriano

O fenômeno que desejamos modelar é o comportamento do decaimento bacteriano em zonas costeiras. A fonte de poluição é originada através da chegada de uma rede pluvial na praia. Como exemplo vamos utilizar as características do Rio Matinhos no litoral paranaense.

O Rio Matinhos é um canal natural que ao longo do tempo foi sofrendo várias intervenções para se adequar à urbanização. O rio, assim como seus afluentes, sofre um considerável despejo de esgoto doméstico não tratado. Na praia de Matinhos, nos arredores da foz do rio, durante todos os anos que foram realizadas análises de qualidade da água, alguns pontos apresentaram concentrações de coliformes acima do permitido. Amostras retiradas do próprio Rio Matinhos um pouco antes de desaguar no mar, mostraram concentrações muito altas de coliformes fecais. A tabela 5.3 mostra as concentrações de coliformes fecais observadas na foz do Rio Matinhos e no seu arredor na temporada de 2007/2008.

Tabela 5.3: Resultados dos Ensaio Laboratoriais (*Escherichia coli*
- Em NMP/100ml)

data	Foz do Rio Matinhos	320 m Esq	330 m Dir	850 m Dir	1200 m Dir
12/11/07	22,000	490	170,000	13,000	3,300
19/11/07	1,600,000	1,700	780	130	330
26/11/07	1,600,000	790	7,900	490	490
3/12/07	790,000	330	18	230	790
10/12/07	1,300,000	490	79,000	49,000	7,900
17/12/07	230,000	140	22,000	170	330
26/12/07	1,100,000	54,000	200	490	490
2/1/08	3,500,000	33,000	490	490	1,300
18/1/08	230,000	3,300	240,000	28,000	3,300
21/1/08	330,000	2,200	79,000	490	330
28/1/08	23,000	3,300	170,000	49,000	79,000
4/2/08	330,000	1,300	330	110	68
11/2/08	490,000	3,300	70,000	70,000	33,000

Como é possível observar na tabela 5.3, a maioria das amostras apresentam uma concentração maior que os $1000 \text{ NMP}(100 \text{ ml})^{-1}$ que é a concentração máxima para uma água ser considerada utilizável para recreação.

Para o modelo numérico de difusão-advecção se adequar à região escolhida para o

estudo, usou-se características físicas da região costeira próxima da Foz do rio Matinhos em um modelo de onda de Boussinesq, com a finalidade de simular a hidrodinâmica costeira. As entradas utilizadas no modelo de Boussinesq foram escolhidas como: altura significativa da onda igual a 0,8 m, período de onda de 6 s e azimute de incidência da onda de 75°. Esses valores caracterizam os valores médios destes atributos na região de estudo. A batimetria utilizada no modelo de Boussinesq foi uma batimetria idealizada, que foi construída usando como base a batimetria real da região, que é mostrada na figura 5.7.

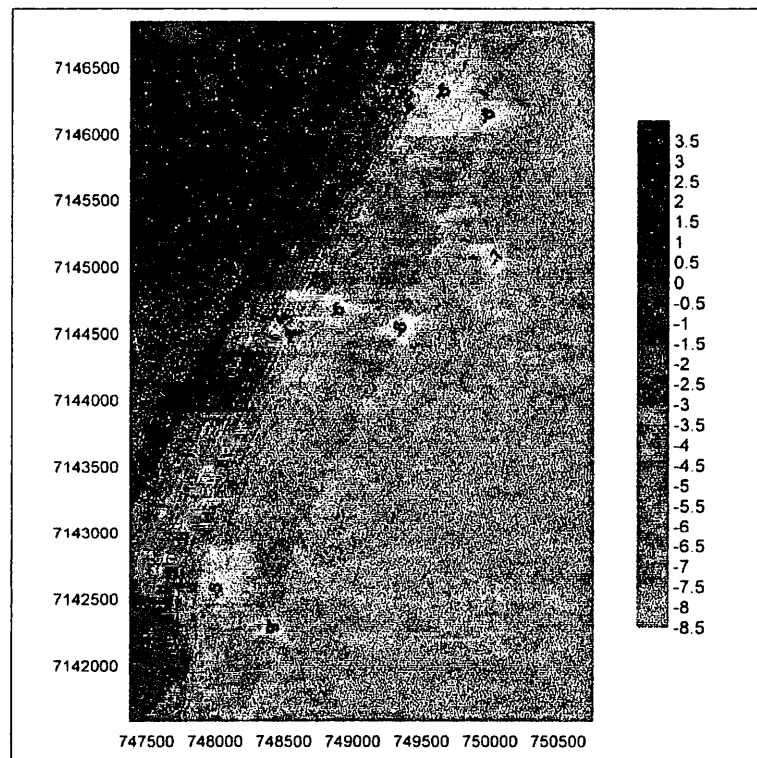


Figura 5.7: Batimetria da praia de Matinhos em metros e coornadas UTM

Nos capítulos anteriores não houve nenhuma especificação com relação a qual é a substância tal que a sua concentração no fluido é dada por C . A partir de agora devemos definir o que significa a concentração C utilizada nas equações diferenciais. A técnica usada para se estimar a densidade de coliformes fecais em uma amostra de água é chamada técnica NMP (numero mais provável). Essa técnica utiliza alguns elementos da probabilidade para estimar a concentração de coliformes em uma amostra sem utilizar uma contagem direta. Com isso as especificações referentes à concentração máxima de coliformes para diferentes usos da água são dados na unidade $\text{NMP}(100\text{ml})^{-1}$. Para evitar

confusões a unidade para concentração bacteriana usada nas simulações presentes nesse trabalho é dada por $\text{NMP}(100\text{ml})^{-1}$.

No instante inicial de simulação consideraremos que a praia está limpa, com exceção da área de chegada do efluente. Consideraremos que a largura do efluente é de aproximadamente 8m. Para simular a entrada de água contaminada consideraremos que a concentração de coliformes fecais do efluente é constante e o efluente é lançado alguns metros na zona de arrebentação. Esse efluente será considerado como um forçante na equação diferencial. A concentração utilizada no forçante foi a média da concentração bacteriana presente na foz do Rio Matinhos, que pode ser vista na tabela 5.3. A figura 5.8 mostra o cenário inicial de simulação.

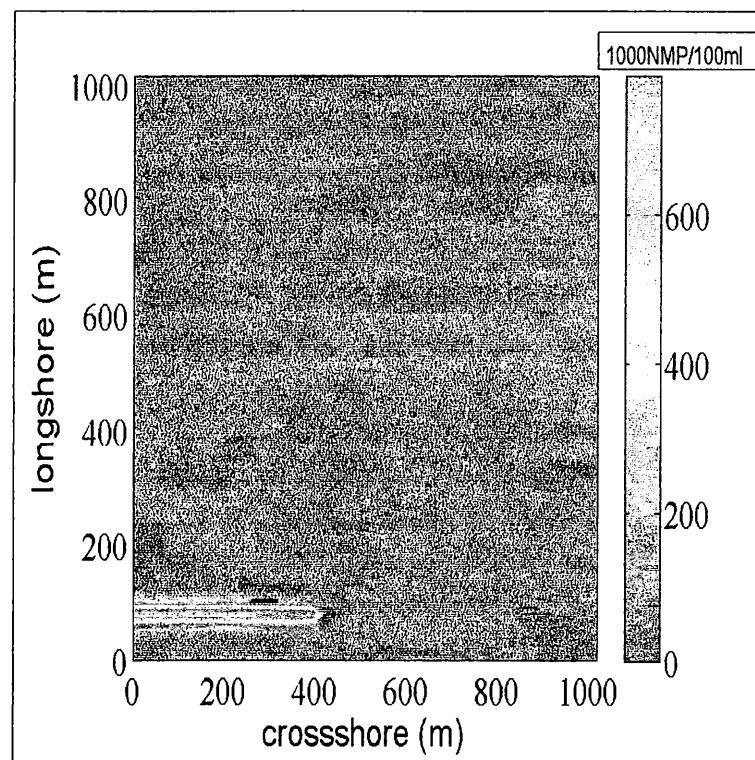


Figura 5.8: Exemplo de Condição Inicial do Modelo

Na figura 5.8 "longshore" representa o eixo paralelo a costa e "crossshore" representa um eixo normal a costa. A zona de arrebentação começa efetivamente a partir de aproximadamente 300m. A concentração de coliformes usada como forçante no modelo numérico foi obtida através de dados do IAP (Instituto Ambiental do Parana), a concentração usada nesse trabalho foi a média obtida na temporada do verão de 2007/2008 na foz do Rio Matinhos presentes na tabela 5.3. A concentração usada foi de $785,6 \times 10^3 \text{NMP}(100\text{ml})^{-1}$.

O coeficiente de difusividade D utilizado foi do tipo de Smagorinski que fornece a difusividade de quantidade de movimento e é dado pela expressão

$$D(x, y) = \Delta x \Delta y C_m \sqrt{U^2 V^2 + \frac{(U + V)^2}{2}}, \quad (5.3)$$

onde Δx e Δy são os valores usados para discretizar o domínio para aplicação do método numérico e C_m é um coeficiente de mistura e seu valor é 0,2.

O coeficiente de decaimento bacteriano K utilizado foi escolhido através do artigo [19] que sugere alguns valores de decaimento para lagoas de maturação. As lagoas de maturação são usadas para pós-tratamento de esgotos e são responsáveis por entre outras coisas remover organismos patogênicos. Em [20] é dito que um fator determinante para o aumento do coeficiente K é a radiação solar seguido da salinidade e do oxigênio dissolvido. A profundidade média da água na zona de arrebentação é de aproximadamente 1m. Para compensar o oxigênio dissolvido e a salinidade alta, o coeficiente de decaimento foi escolhido igual a $8,08 \text{ d}^{-1}$ que é típico de profundidades de 0,64 m.

No modelo numérico usado no estudo de caso da foz do rio Matinhos a malha de diferenças finitas foi construída com 511×255 pontos e espaçamento $\Delta x = 2 \text{ m}$ e $\Delta y = 4 \text{ m}$. O domínio dado por essa malha de diferenças finitas é um retângulo com 1022 m de comprimento e 1020 m de largura. O tempo foi discretizado usando $\Delta t = 0,01 \text{ s}$.

5.3 Simulações e Perfis de Concentração Média e Máxima

As figuras a seguir nos fornecem a disposição da concentração de coliformes fecais calculadas através do modelo numérico usando as entradas físicas descritas na seção anterior. As figuras 5.9-5.14 representam a concentração de coliformes fecais dados em $1000\text{NMP}(100\text{ml})^{-1}$.

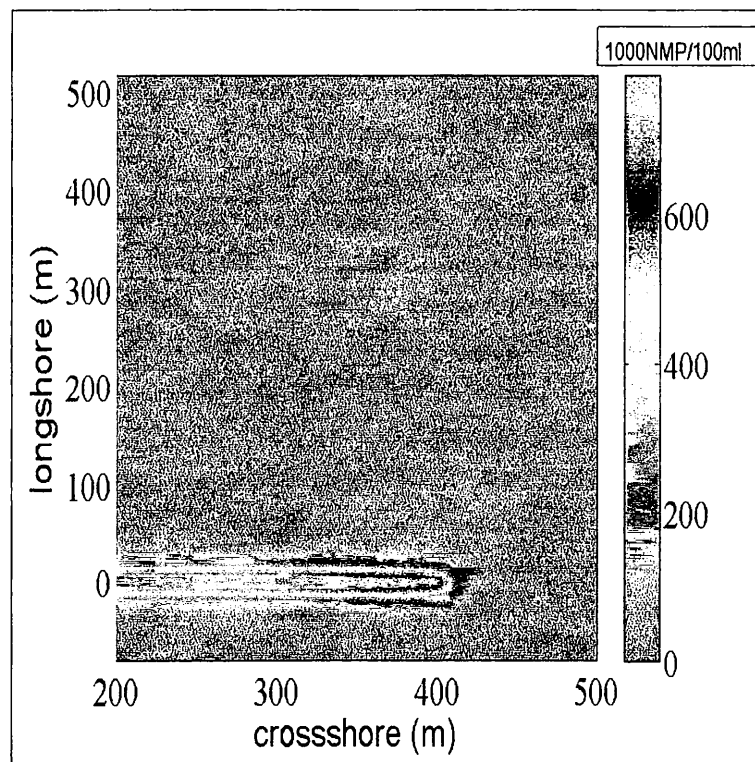


Figura 5.9: Simulação $t=10\text{min}$

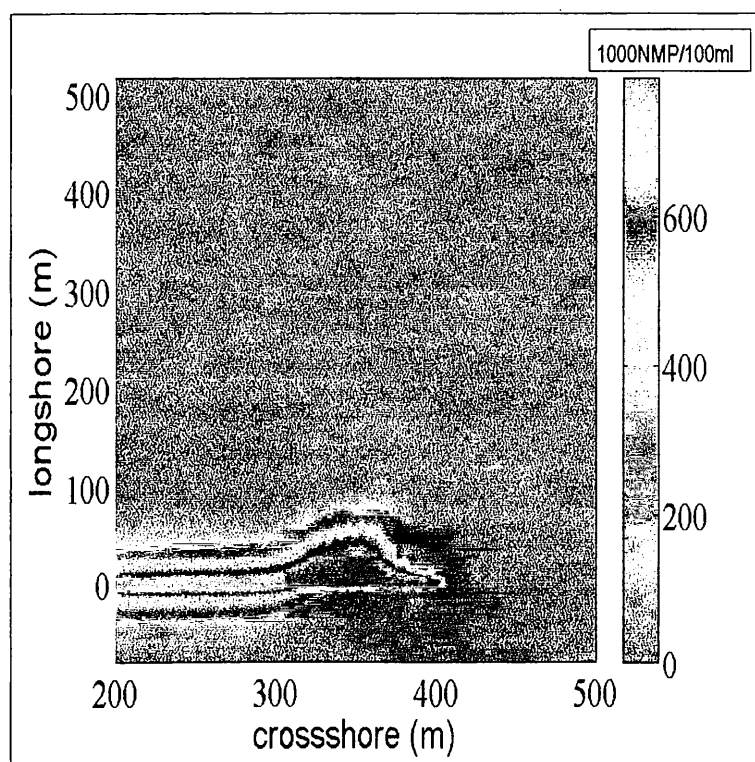


Figura 5.10: Simulação $t=30\text{min}$

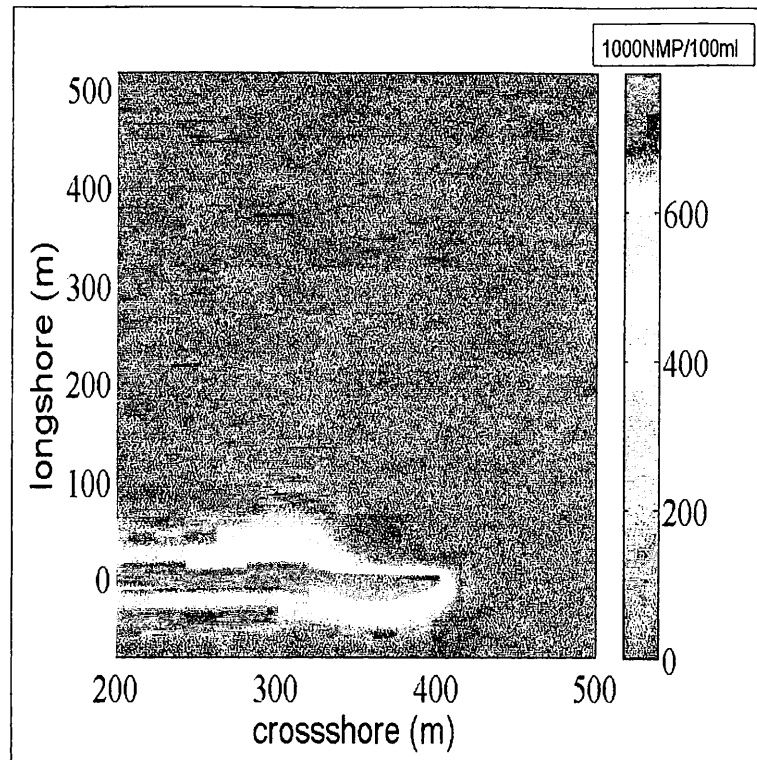


Figura 5.11: Simulação $t=60\text{min}$

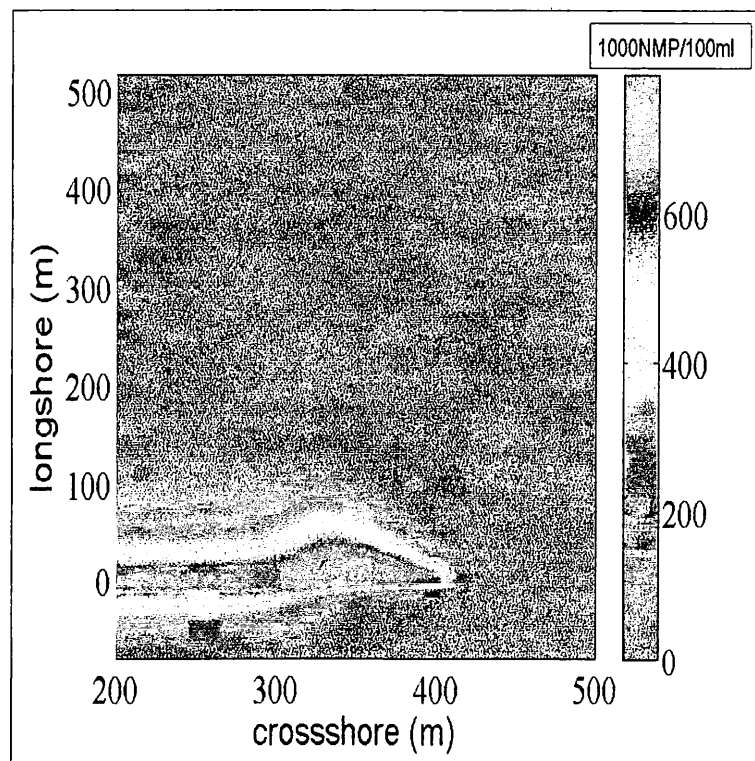


Figura 5.12: Simulação $t=120\text{min}$

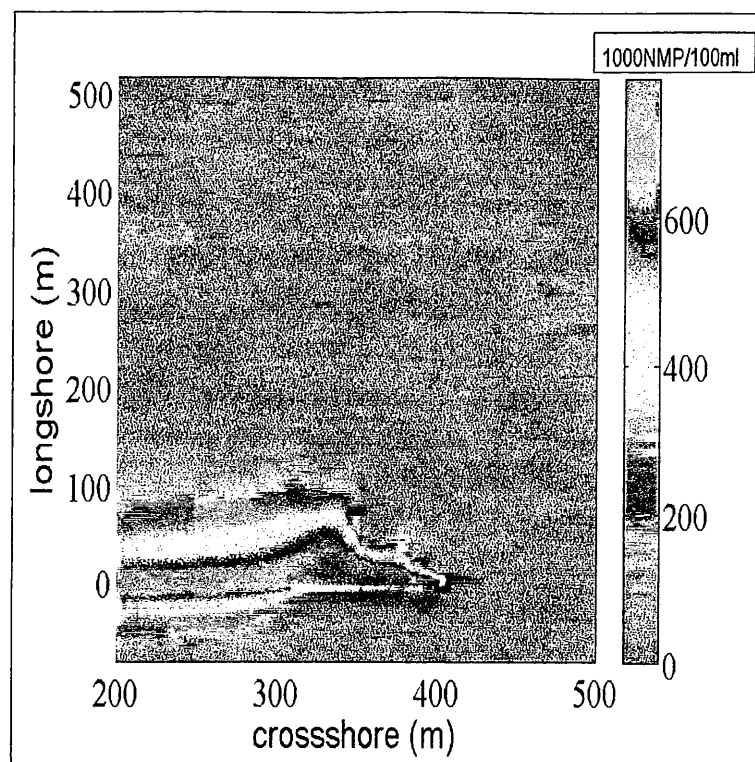


Figura 5.13: Simulação $t=310\text{min}$

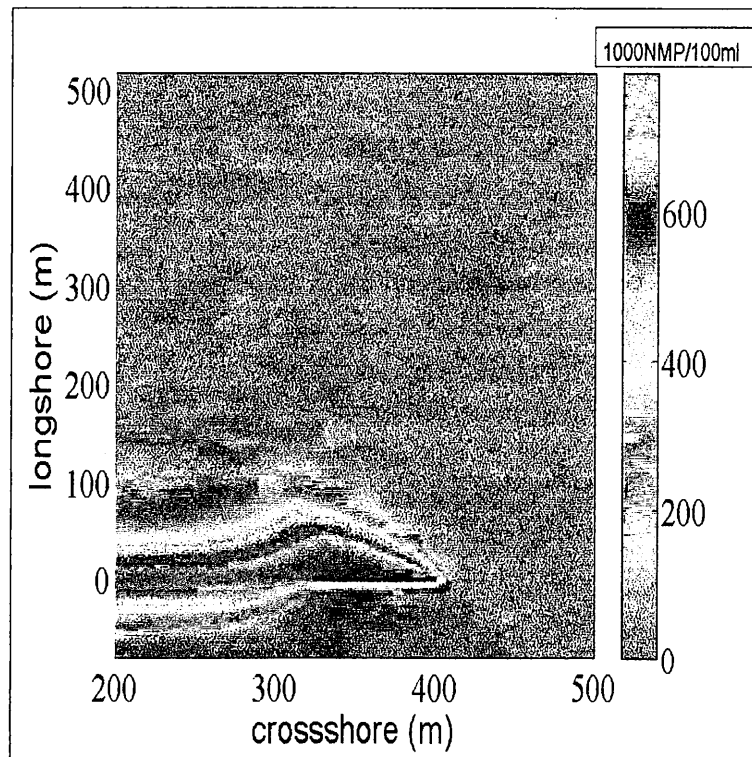


Figura 5.14: Simulação $t=560\text{min}$

Um dado relevante para aplicações práticas é a concentração média ao longo da zona

de arrebenção. Em diferentes instantes de tempo um perfil da concentração média na zona de arrebenção foi calculada ao longo da costa. O intervalo usado para fazer essa média foi de 300 a 400 metros ao longo do eixo *crossshore* que é o eixo normal à costa. As figuras 5.15 - 5.16 representam o perfil médio da concentração em $1000\text{NMP}(100\text{ml})^{-1}$, ao longo da costa (eixo *longshore*) considerando que o início do eixo y é o ponto ao longo do eixo *longshore* onde está ocorrendo o despejo.

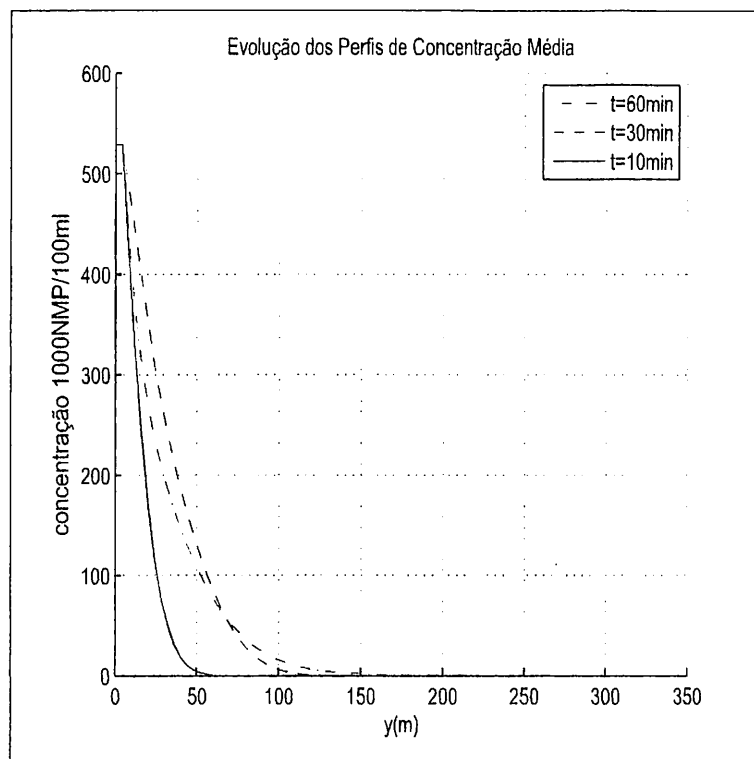


Figura 5.15: Concentração Média da Zona de Arrebenção ao Longo da Costa em $t=10$ min, $t=30$ min e $t=60$ min

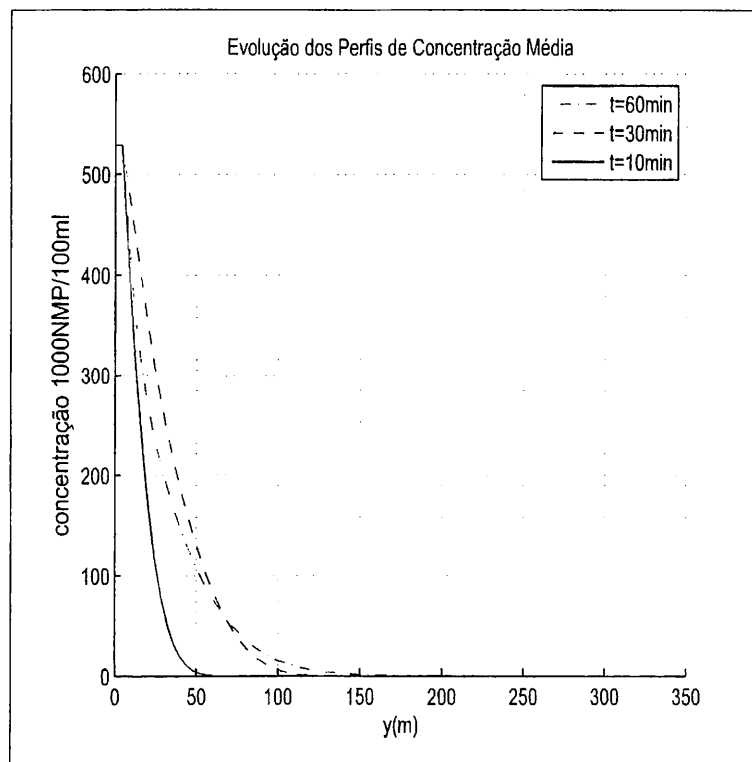


Figura 5.16: Concentração Média da Zona de Arrebentação ao Longo da Costa em $t=120$ min, $t=240$ min, $t=480$ min e $t=600$ min

Outro dado importante é o perfil da concentração máxima ao longo da costa. Dentro do mesmo intervalo considerado para calcular a concentração média foi feito um perfil da concentração máxima. Esses perfis foram feitos da seguinte maneira: Ao longo da costa a concentração máxima foi calculada no intervalo aonde está ocorrendo a arrebentação das ondas. Esse intervalo é dado entre 300 m e 400 m ao longo do eixo normal à praia. As figuras 5.17 - 5.18 mostram esses perfis da concentração máxima em $1000\text{NMP}(100\text{ml})^{-1}$, considerando o início do eixo y como o começo do despejo.

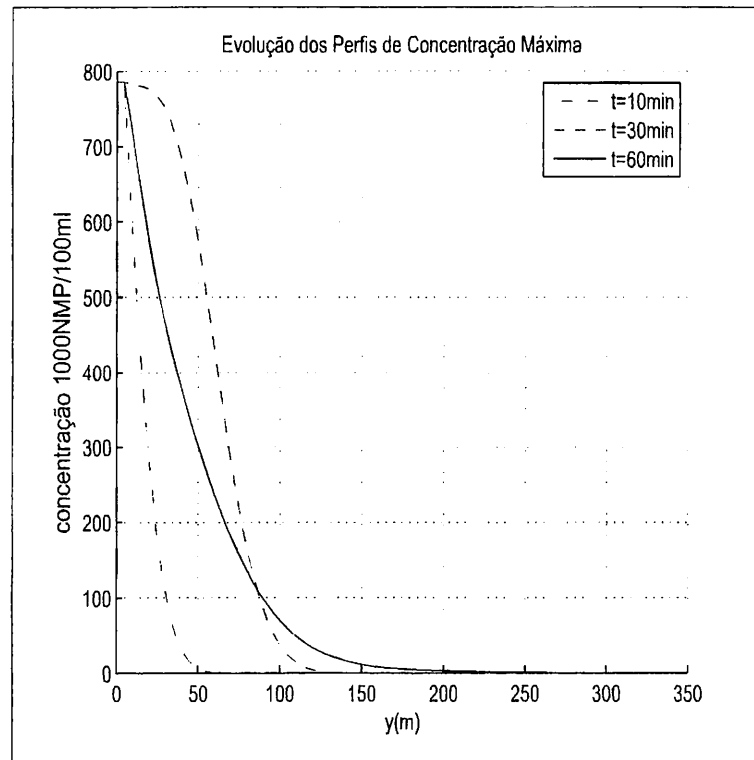


Figura 5.17: Concentração Máxima da Zona de Arrebentação ao Longo da Costa em $t=10$ min, $t=30$ min e $t=60$ min

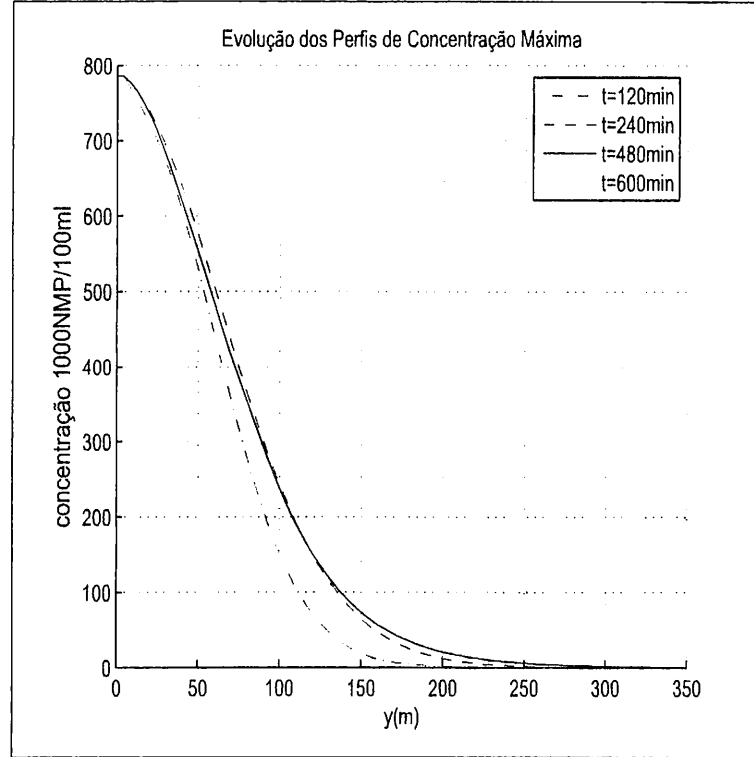


Figura 5.18: Concentração Máxima da Zona de Arrebentação ao Longo da Costa em $t=120$ min, $t=240$ min, $t=480$ min e $t=600$ min

5.4 Comportamento Estacionário e Comparação com uma Solução Analítica

Observou-se que os perfis de concentração média e máxima depois de um dado tempo quase não se modificavam com o tempo. Com isso abriu-se uma boa oportunidade de tentar aproximar esse comportamento da concentração bacteriana através de alguma solução analítica de casos simplificados. Entre as soluções apresentadas no capítulo 4 a que se mostrou mais adequada foi a apresentada na seção 4.2.7 que é dada por:

$$C(x, y, t) = \frac{C_0}{2} \left[\exp \left[\frac{Uy}{2D} (1 + \sqrt{1 + 2H}) \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{y + Ut\sqrt{1 + 2H}}{2\sqrt{Dt}} \right] + \exp \left[\frac{Uy}{2D} (1 - \sqrt{1 + 2H}) \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{y - Ut\sqrt{1 + 2H}}{2\sqrt{Dt}} \right] \right] \quad (5.4)$$

Onde $H = \frac{2KD}{U^2}$. Essa solução de um problema transiente atinge seu estado de regime permanente quando o tempo tende ao infinito. Com isso o regime permanente é dado por:

$$C(y) = C_0 \exp \left[\frac{Uy}{D} - \sqrt{\frac{U^2}{D^2} + \frac{4K}{D}} y \right] \quad (5.5)$$

A figura 5.19 representa o comportamento de perfis numéricos para diferentes instantes de tempo. É possível notar pouca variação entre os diferentes perfis caracterizando um regime praticamente permanente.

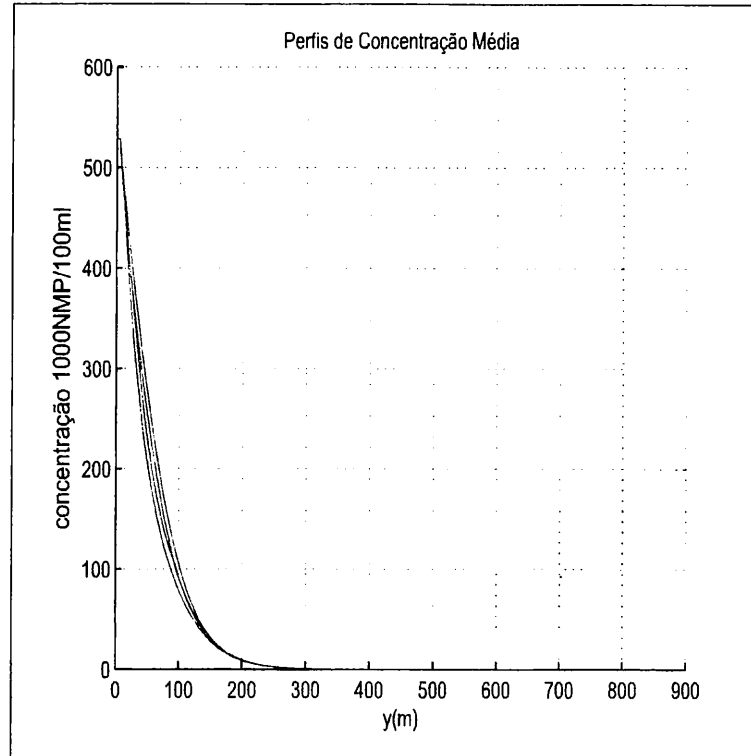


Figura 5.19: Perfil do Regime Permanente para a Concentração Média

Os valores utilizados para ajustar a expressão (4.123) foram obtidos usando o mínimo possível de arbitrariedade nos valores dos parâmetros, com isso os parâmetros foram estimados como: U foi substituído pela média na zona de arrebentação da velocidade paralela a costa calculada pelo modelo de Boussinesq e D foi substituído pela difusividade média na zona de arrebentação que é calculada pela expressão (5.3). Vale salientar que as grandezas U e D utilizadas na calibração das soluções analíticas são médias espaciais e temporais. Em diferentes intervalos de tempo foram feitos perfis com os valores médios, na zona de arrebentação, da velocidade U e da difusividade D ao longo da costa. Com esses perfis foram calculadas as médias dessas duas grandezas ao longo de toda a costa. Com as médias calculadas para diferentes intervalos de tempo foi calculada a média temporal das duas grandezas.

O coeficiente de decaimento K foi escolhido para ajustar a solução analítica ao perfil do estado estacionário dado pela simulação numérica. Com os valores pre-determinados de U e D na solução analítica, achou-se através de um algoritmo o valor de K que minimiza o erro médio entre o regime permanente numérico e a solução analítica. Também foi analisado a razão entre os erros e o valor da solução numérica, a média dessa razão nos primeiros 300 m a partir da chegada do efluente na praia será designado por R_{erro} . Outro fator analisado foi a diferença entre a distância na qual a concentração de coliformes fecais dada pela solução numérica e analítica fica abaixo de $1000\text{NMP}(100\text{ml})^{-1}$, essa diferença será designada por D_C . Os coeficientes usados em (4.123) foram: $U = 0,01742147 \text{ ms}^{-1}$, $D = 0,25518 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $C_0 = 529014,4 \text{ NMP}(100\text{ml})^{-1}$ e $K = 0,000213093 \text{ s}^{-1}$.

A tabela 5.4 apresenta o valor do erro médio, R_{erro} e D_C para os coeficientes U , D e K dados acima.

Tabela 5.4: Comparações entre a solução analítica ajustada ao regime permanente numérico da concentração média

Erro Médio $\text{NMP}(100\text{ml})^{-1}$	R_{erro}	D_C m
2251,6125	0,1272	0,16

A figura 5.20 mostra a comparação entre a solução analítica ajustada e a solução numérica para o perfil da concentração média.

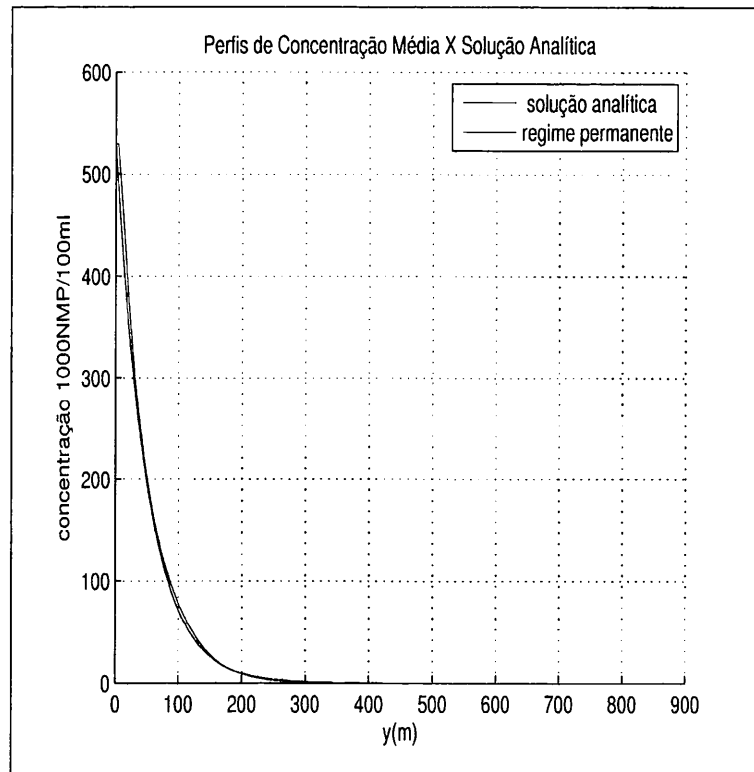


Figura 5.20: Regime Permanente \times Solução Analítica

O mesmo procedimento usado para aproximar o perfil de concentração média pode ser usado para aproximar o perfil de concentração máxima na seção transversal.

Para ajustar a solução analítica para o caso do perfil da concentração máxima foi necessário ajustar o coeficiente de caimento K utilizando um método análogo ao empregado na concentração média. Com isso os valores da função ajustada ficaram: $U = 0,01742147 \text{ ms}^{-1}$, $D = 0,25518 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $C_0 = 785666 \text{ NMP}(100\text{ml})^{-1}$ e $K = 0,00014 \text{ s}^{-1}$. A tabela 5.5 apresenta o valor do erro médio, R_{erro} e D_C para os coeficientes U , D e K dados acima.

Tabela 5.5: Comparações entre a solução analítica ajustada ao regime permanente numérico da concentração máxima

Erro Médio $\text{NMP}(100\text{ml})^{-1}$	R_{erro}	$D_C \text{ m}$
10121,3086	0,8073	21,09

A figura 5.21 fornece uma comparação entre o perfil característico do regime permanente da concentração máxima com a solução analítica calibrada.

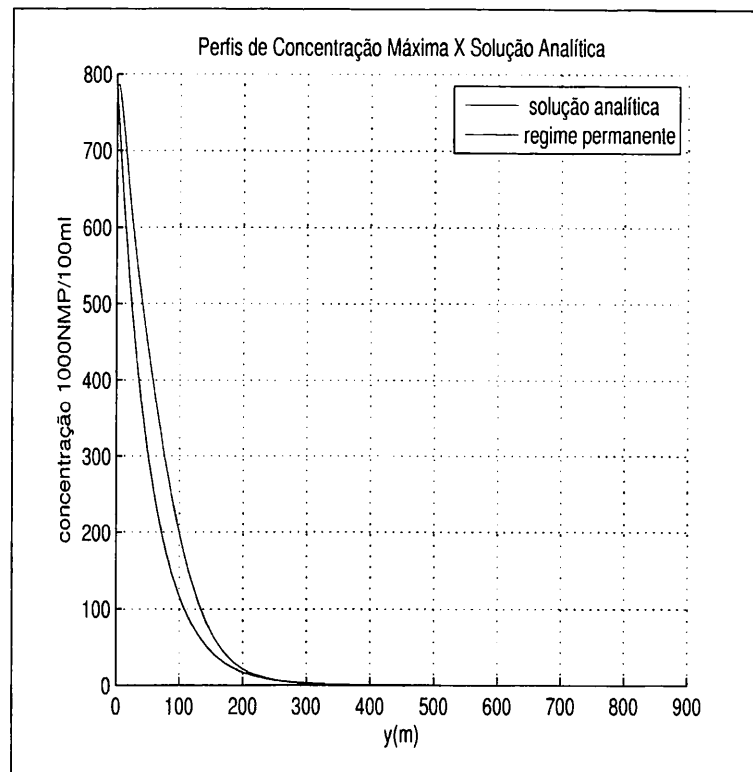


Figura 5.21: Perfil da Concentração Máxima × Solução Analítica

Capítulo 6

Conclusões e Recomendações

O objetivo principal desse trabalho é mostrar uma metodologia para a construção de expressões matemáticas, baseadas em soluções analíticas, que fornecem perfis de concentração de organismos patogênicos em zonas costeiras. Com a finalidade de alcançar esse objetivo principal o primeiro passo foi construir um modelo numérico que possa considerar todas as complexidades apresentadas pelo fenômeno real.

Depois de construído o modelo numérico o próximo passo é achar alguma expressão matemática que forneça perfis de concentração coerentes com os valores fornecidos pelas simulações numéricas. Com relação a esse objetivo a metodologia proposta nesse trabalho se mostrou até certo ponto satisfatória para a concentração média na zona de arrebenção.

Foi possível achar uma expressão simples que apresentou uma porcentagem baixa de erro ao prever a concentração média de coliformes fecais, calculada através do modelo numérico com entradas muito mais complexas. Com essa expressão do perfil da concentração média, para o cenário proposto nesse trabalho é possível prever entre outras coisas, em quantos metros de distância do effluente é seguro entrar na água de acordo com as recomendações dos órgãos de saúde. O perfil de concentração máxima dado pela solução analítica não aproximou adequadamente ao perfil numérico em toda a sua extensão. Isso se deu porque a velocidade usada para calibrar a solução analítica foi a velocidade média do escoamento paralelo a costa. Para calibrar corretamente o perfil de concentração máxima é necessário utilizar algum outro tipo de consideração para a velocidade, ou explorar melhor os parâmetros D , U e K como parâmetros de calibração, em sacrifício dos seus significados físicos.

Com relação às soluções analíticas foi possível achar soluções de alguns casos sim-

plificados. Apesar de existirem na literatura soluções de casos mais complexos que o apresentado nesse trabalho, algumas soluções apresentadas aqui são pouco difundidas na literatura. As soluções apresentadas nesse trabalho têm um potencial didático pois elas são extensões naturais de soluções clássicas de problemas unidimensionais e elas podem ser construídas sem nenhum problema somente tendo em mãos uma tabela usual de transformadas integrais.

Vale salientar que o resultado apresentado nesse trabalho vale para somente um cenário físico, definido principalmente pelas características das ondas incidindo na praia. Essas características são a altura significativa da onda, período de onda e azimuth de incidência da onda. As características das ondas da praia de Matinhos são variáveis e podem ser muito diferentes das utilizadas para gerar os campos de velocidades desse trabalho. Os valores dos coeficientes de difusividade D e o coeficiente de decaimento K foram escolhidos com um propósito de exemplificação e não necessariamente representam os valores ideais para o cenário simulado.

Esse trabalho pode ser um ponto de partida para se construir modelos mais completos e adequados a aplicações práticas. Para isso deve-se primeiramente simular muitos cenários físicos com a finalidade de construir um modelo numérico o mais verossímil possível. Para isso é necessário existir uma coleta de dados mais apropriada a essa finalidade. Medições de qualidade da água devem ser feitas conjuntamente com coleta de dados sobre as características das ondas e correntes na praia. Com esses dois dados coletados ao mesmo tempo é possível construir modelos mais adequados a realidade física.

Deve-se também definir de modo mais criterioso quais são os termos de decaimento bacteriano K e o coeficiente de difusividade D usados no modelo numérico na zona de arrebentação. Por exemplo esses dois coeficientes podem ser usados para calibrar a solução numérica com relação a dados reais do problema.

Para uma extensão desse trabalho é possível construir soluções analíticas de casos mais complexos como por exemplo equações com campos de velocidades variando no espaço e no tempo. Soluções mais complexas de problemas difusivos-advectivos podem ser encontradas em [15].

Capítulo 7

Bibliografía

Referências Bibliográficas

- [1] Abramowitz, M. and Stegun *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York, Dover 9^a Edition (1972).
- [2] Anderson Kimberly, L. *Persistence and Differential Survival of Fecal Indicator Bacteria in Subtropical Waters and Sediments* ,. APPLIED AND ENVIRONMENTAL MICROBIOLOGY (2005). Kimberly L. Anderson
- [3] Angulo R.J. *As Praias do Paraná: problemas decorrentes de uma ocupação inadequada*,.Boletim Análise Conjuntural (1984).
- [4] Asper Kej *Dhigroup webpage*. [online] Disponível na internet via WWW.URL: <http://www.dhigroup.com/> ,.Arquivo capturado em 21 de março de 2010 .
- [5] Figueiredo, D.G *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*,.Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada 1^a Edition (1977).
- [6] Filho F.A.L.,*Avaliação da Filtração e Ozonização de Efluente Sanitário Primário: Aspectos de Insalivação Microbiana e Variáveis de Ozonização*,. Quimica Nova Vol 31 (2008).
- [7] Fischer, H. B.*Mixing in inland and coastal waters*.San Diego, Academic Press (1979).
- [8] Fundação Coppetec *SisBaHia webpage*. [online] Disponível na internet via WWW.URL: <http://www.sisbahia.coppe.ufrj.br/> ,.Arquivo capturado em 21 de março de 2010 .
- [9] Gobbi M.F. e James T. Kirby *Wave evolution over submerged sills: tests of a high-order Boussinesq model* ,.Coastal Engineering 37 (1999).
- [10] Gobbi M.F., James T. Kirby e Wei , G. *A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 2. Extension to $\mathcal{O}(kh)^4$* ,.Journal of Fluid Mechanics vol. 405 (2000).

- [11] Greenberg, M. D. *Advanced Engineering Mathematics*. Delaware, University of Delaware, 2ª Edição (1998).
- [12] Hartz, A. *Survival Potential of Escherichia coli and Enterococci in Subtropical Beach Sand: Implications for Water Quality Managers*, . Journal of Environmental Quality (2008).
- [13] Longuet Higgins, M.S. *Longshore Currents Generated by Obliquely Incident Sea Waves*, . Oregon, Journal of Geophysical Research vol 75 (1970).
- [14] Longuet Higgins, M.S. *Radiation Stresses in Water Waves; a physical discussion with applications*, . Deep Sea Research vol1 (1964).
- [15] O'Loughlin, E. M. *Dilution and decay of aquatic herbicides in flowing channels*. Journal of Hydrology vol 26 (1974).
- [16] Menon, P., Billen, G., Servais, P. *Mortality rates of autochthonous and fecal bacteria in natural aquatic systems*. Water Research (2003)..
- [17] Moreira, D.M. *The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere*, . Atmospheric Research (2008).
- [18] Princeton University *POM webpage*. [online] Disponível na internet via WWW. URL: <http://www.aos.princeton.edu/WWWPUBLIC/htdocs.pom/index.html> ,. Arquivo capturado em 21 de março de 2010 .
- [19] Silva, A Salomão, *Efeito de Características Físicas e Operacionais na Cinética de Remoção de Coliformes Fecais em Lagoas Facultativas Secundárias e de Maturação* ,. 19º Congresso de Engenharia Sanitária e Ambiental (2005).
- [20] Souza, S.A.G.T. *Modelo Matemático de Mortalidade de Bactérias Coliformes em Águas Costeiras* ,. Dissertação de Mestrado (2008).
- [21] Tikhonov, A.N and Samarski, A.A. *Equations of Mathematical Physics*, . New York, Dover 1ª Edition (1990).
- [22] Wei, G. *A fully Nonlinear Boussinesq Model for Surface Waves. Part 1. Highly Nonlinear Unsteady Waves* ,. Journal of Fluid Mechanics vol 294 (1995).

- [23] Yamaraha Kevan , M. *Growth of Enterococci in Unaltered, Unseeded Beach Sands Subjected to Tidal Wetting* ,. APPLIED AND ENVIRONMENTAL MICROBIOLOGY (2009).
- [24] Yang , L *Modelling enteric bacteria level in coastal and estuarine waters* ,. Engineering and Computational Mechanics (2008).
- [25] Kashefipour, S.M. *Modelling the fate of faecal indicators in a coastal basin* ,.Water Research (2005).
- [26] Kay, D. et al *Decay of intestinal enterococci concentrations in high-energy estuarine and coastal waters: towards real-time T_{90} values for modelling faecal indicators in recreational waters* .Water Research (2005).
- [27] Zabadal J.R.,Poffal C.A. e Leite S.B. *Closed form solutions for water pollution problems II* ,.Latin American Journal of Solids and Structures (2006).

Apêndice A

Códigos em Fortran

```
program calculo doh decaimento velocidades simples modificado
```

```
implicit none
```

```
real dt,dx,dy,K,A,B,C1,E,D1,r1,r2,x,y,r3,r4,A1,A2,A3,D2,dix,diy
```

```
parameter(dt=0.1)
```

```
integer i,j,t,tf,nx,ny,c,m,s,m2,l,n
```

```
parameter(nx=511,ny=255)
```

```
real C0(nx,ny),Cf(nx,ny),h(nx,ny),D(nx,ny)
```

```
real U(nx,ny),V(nx,ny)
```

```
character*9 fnamesu
```

```
character*9 fnamesv
```

```
character*9 fnamesm
```

```
K=8.08/86400.
```

```
dx=2.
```

```
dy=4.
```

```

OPEN(1,file='hshear3_2.data', status='old')

do i=1,nx
    read(1,*)(h(i,j),j=1,ny)
end do

CLOSE(1)

write (*,*) ' escreva o valor de t'
read (*,*) tf

c      condicoes de contorno c
***** C
***** C
*****

do i=1,ny
    C0(1,i)=0.
enddo

do i=1,nx
    C0(i,1)=0.
enddo

do i=1,nx
    C0(i,ny)=0.
enddo

do i=1,ny
    C0(nx,i)=0.
enddo

c      condições iniciais

do i=2,510

```

```
do j=2,254
```

```
C0(i,j)=0.
```

```
enddo
```

```
enddo
```

```
do i=2,200
```

```
do j=21,22
```

```
C0(i,j)=785.666
```

```
enddo
```

```
enddo
```

c atribuyendo valores para CF *****

```
do i=1,ny
```

```
Cf(1,i)=0.
```

```
enddo
```

```
do i=1,nx
```

```
Cf(i,1)=0.
```

```
enddo
```

```
do i=1,nx
```

```
Cf(i,ny)=0.
```

```
enddo
```

```
do i=1,ny
```

```
Cf(nx,i)=0.
```

```
enddo
```

c computando coeficientes constantes

```
dix=1./dx
```

```

    diy=1./dy
    r1=dt/(2.*dx)
    r2=dt/(dx**2.)
    r3=dt/(2.*dy)
    r4=dt/(dy**2.)

    A1=1.-k*dt
    A2=-2.*(r2+r4)

c
***** C
*****

    do i=1,nx
    do j=1,ny
    D(i,j)=0.25518
    enddo
    enddo

c    montar os campos U e V iniciais
OPEN(1,file='U0001.out',status='old',access='direct',recl=4*ny)
    do i=1,nx
    read(1,rec=i)(U(i,j),j=1,ny)
    end do
    CLOSE(1)
OPEN(1,file='V0001.out',status='old',access='direct',recl=4*ny)
    do i=1,nx
    read(1,rec=i)(V(i,j),j=1,ny)
    end do
    CLOSE(1)

c    calculo doh decaimento

```

```

s=0
c=1
do t=1,tf

m= MOD(t,600)

if ( m .LT. 1) then

c=c+1

write(fnamesu,'(a1,i1,i1,i1,i1,a4)') 'U',
&          mod(c/1000,10),  mod(c/100,10),
&          mod(c/10,10),mod(c,10),' .out'

write(fnamesv,'(a1,i1,i1,i1,i1,a4)') 'V',
&          mod(c/1000,10),  mod(c/100,10);
&          mod(c/10,10),mod(c,10),' .out'

OPEN(1,file=fnamesu,status='old',access='direct',recl=4*ny)
do i=1,nx
read(1,rec=i)(U(i,j),j=1,ny)
end do
CLOSE(1)
OPEN(1,file=fnamesv,status='old',access='direct',recl=4*ny)
do i=1,nx
read(1,rec=i)(V(i,j),j=1,ny)
end do
CLOSE(1)

do l=2,510
do n=2,254

```

```

D(1,n)=0.2*dx*dy*SQRT(U(1,n)*U(1,n)+V(1,n)*V(1,n)+
&      0.5*(U(1,n)+V(1,n))*(U(1,n)+V(1,n)))+0.01

if ( D(1,n) .LT. 0.25518 ) then
D(1,n)=0.25518
endif

enddo

enddo

end if

do i=2,510
do j=2,254

A=A1+A2*D(i,j)
B=r2*D(i,j)-r1*U(i,j)+(D(i+1,j)-D(i,j))*dix*r1
C1=r4*D(i,j)-r3*V(i,j)+(D(i,j+1)-D(i,j))*diy*r3
D1=r2*D(i,j)+r1*U(i,j)-(D(i+1,j)-D(i,j))*dix*r1
E=r4*D(i,j)+r3*V(i,j)-(D(i,j+1)-D(i,j))*diy*r3
Cf(i,j)=C0(i+1,j)*B+C0(i,j+1)*C1+C0(i-1,j)*D1+C0(i,j-1)*E+
&  C0(i,j)*A

if ( Cf(i,j) .LT. 0.) then
Cf(i,j)=0.
endif

enddo

enddo

c      *****
c      montando o contorno de CF

```



```

do i=1,ny
Cf(1,i)=Cf(2,i)
enddo

c    C0 recebe Cf

do i=1,nx
do j=1,ny

C0(i,j)=Cf(i,j)
enddo
enddo

c    atualizando o forçante
do i=2,200
do j=21,22
C0(i,j)=785.666
enddo
enddo

c    *****
m2= MOD(t,6000)

if ( m2 .LT. 1) then

s=s+1

write(fnamesm,'(a1,i1,i1,i1,i1,a4)') 'M',
&          mod(s/1000,10),  mod(s/100,10),
&          mod(s/10,10),mod(s,10),' .txt'

OPEN(1,file=fnamesm,status='NEW')

```

```

do j=1,nx
write(1,150) (C0(j,i),i=1,ny)
150 format (255F10.4)
enddo
close(1)

endif

enddo

write (*,*)'fechou ', fnamesu,dx,dy
stop
end

```